Potenciação

O que é preciso saber (passo a passo)

Seja:

$$\mathbf{A}^{\text{(potência)}} = \underset{\text{(base)}}{\mathbf{a}}^{\mathbf{n}\text{(expoente)}}$$

É notório a todos que o expoente nos diz quantas vezes a base será multiplicada, isto é:

Ex $_1$) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Traduzindo: base 2 elevado ao expoente 3 obtemos a potência 8.

Ex $_2$) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Traduzindo: base (-2) elevado ao expoente 3 obtemos a potência –8

Importantíssimo: **nas propriedades de potenciação, quando a base é negativa, o sinal de menos sempre pertence ao elemento neutro da multiplicação, que é o número 1; isto nos facilitará e muito provar as propriedades da potenciação.**

Veja:

$\mathbf{-2^3}$ é o mesmo que $\mathbf{-1 \cdot 2^3 = -1 \cdot 8 = -8}$

$\mathbf{(-2)^2}$ é o mesmo que $\mathbf{(-1 \cdot 2)^2 = [(-1)^2 \cdot 2^2] = 1 \cdot 4 = 4}$

Então fica fácil explicar porque:

$$-2^2 \neq (-2)^2$$

$$-1 \cdot 2^2 = -4 \qquad\qquad (-1 \cdot 2)^2 = (-1) \cdot (2)^2$$

$$1 \cdot 4 = 4$$

$$-4 \neq 4$$

Exercício:

Será que a afirmação $(-2)^n = -2^n$ é verdadeira para todo "**n**" natural?
É óbvio que o sinal da potência vai depender da análise, ou seja , se "n"é par ou ímpar.

1º Caso: Se "n" é par temos:

$(-2)^n = -2^n$ (Qualquer que seja "n", o sinal do termo já está determinado)

$[(-1) \cdot 2]^2 = -1 \cdot 2^n$

$(-1)^n \cdot 2^n$

$+2^n \qquad -2^n$

Conclusão $2^n \neq -2^n$ se "n" for par

2º Caso: se "n" é ímpar temos:

$(-2)^n = -2^n$ (Qualquer que seja "n", o sinal do termo já está determinado)

$[(-1) \cdot 2]^n = -1 \cdot 2^n$

$(-1)^n \cdot 2^n =$

$-2^n \qquad = \qquad -2^n$

Conclusão: $(-2)^n = -2^n$ somente se “n” for ímpar

Propriedades da potenciação

Facilita e muito a análise das propriedades se você escolher números que podem ser representados na mesma base. Na multiplicação, use:
8 . 4
9 . 27
5 . 25

Os quais serão convertidos em:

$8 . 4 = 2^3 . 2^2 = 2^5$
$9 . 27 = 3^2 . 3^3 = 3^5$
$5 . 25 = 5^1 . 5^2 = 5^3$

Propriedade: em produtos de mesma base , conserva-se a base e somam-se os expoentes:

$$\mathbf{a^{m} . a^{p} = a^{m+p}}$$

Importantíssimo: a recíproca desta propriedade é verdadeira, isto é, sempre que existir uma única base com soma de expoentes, separe-os imediatamente.

Veja:

$a^{m+p} = a^m . a^p$

$2^{n+3} = 2^n . 2^3 = 2^n . 8$

$2^{n+p+q} = 2^n . 2^p . 2^q$

Obs: caso existir uma série de termos, não esqueça de colocar o termo comum em evidência.

Ex: $2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+1}$

$2^n \,.\, 2^2 + 2^n \,.\, 2^3 + 2^n \,.\, 2^1$

$2^n(2^2 + 2^3 + 2)$

$2^n(14)$

Propriedade: facilita e muito memorizar exemplos de números que ao serem fatorados possuam a mesma base.

Ex: $\frac{8}{4} \quad \frac{25}{25} \quad \frac{81}{9}$

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$$

Propriedade: em divisão de potência de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

Ou : $\frac{a^m}{a^p} = \frac{1}{a^{p-m}}$

Ex: $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$ ou $\frac{2^5}{2^2} = \frac{1}{2^{2-5}} = \frac{1}{2^{-3}}$

Obs: observe que você pode conservar a base do numerador ou a base do denominador; é indiferente.

Sendo “m” e “n” ,calcule:

$$\frac{2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}}{2^{n+3} + 2^{n+4}} = \frac{2^n + 2^n.2^1 + 2^n.2^2}{2^n.2^3 + 2^n.2^4} = \frac{2^n(1+2+2^2)}{2^n(2^3+2^4)} = \frac{7}{24}$$

Interessantíssimo: você sabia que a preposição “de” acompanhada de fração significa multiplicação?

Veja:

Quanto é $\frac{2}{3}$ de 12?

Solução: $\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{12}^{4} = 8$

Quanto é a metade de um quarto de 2^{50}?

Solução: $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.2^{50}$

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.2^{50} = \frac{1}{2^3}.2^{50} = 2^{47}$$

Uma planta aquática duplica de área no final de cada dia.Sabe-se que no final de cada dia a planta já ocupará toda a superfície da lagoa.

Solução:

1º dia = 2^1
2º dia = 2^2
3º dia = 2^3
Nº dia = 2^n

Se 2^{10} = A, para obtermos $\frac{A}{4}$ basta dividir toda a equação por 4:

$\frac{2^{10}}{4} = \frac{A}{4}$ (quarta parte da lagoa)

$\frac{2^{10}}{2^2} = \frac{A}{4} \rightarrow 2^8 = \frac{A}{4} \rightarrow$ quarta parte da área da lagoa oitavo dia

Resposta: no oitavo dia

Interessantíssimo: você sabe o porquê de todo número elevado a zero ser igual a 1?

$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

Para você provar, basta representar uma fração onde o numerador e o denominador sejam iguais.

Ex: $\frac{8}{8} = 1$ aplicando a propriedade: $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$$\frac{8^1}{8^1} = 1 \rightarrow 8^{1-1} = 1$$

$8^0 = 1$

Conclusão: $a^0 = 1$ é uma conseqüência da propriedade

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Interessantíssimo: você sabe o porquê disso?

$$\frac{1}{a^n} = a^n \text{ ?}$$

O número 1 poderá ser sempre ser substituído pela mesma base em análise elevada a zero, isto é:

$$\frac{1}{a^n} \rightarrow \frac{a^0}{a^n} \rightarrow a^{0-n} \rightarrow a^{-n}$$

Ex:

$$\frac{a}{b^n} \to a.\frac{1}{b^n} \to a.\frac{b^0}{b^n} \to a.b^{0-n} \to a.b^{-n}$$

$$\frac{5}{4} \to \frac{5}{2^2} \to 5.\frac{1}{2^2} \to 5.\frac{2^0}{2^2} \to 5.2^{0-2} \to 5.2^{-2}$$

Calcule: $\frac{\pi^x}{\pi^{x-3}} = \frac{\pi^x}{\pi^x . \pi^{-3}} = \frac{1}{\pi^{-3}} = \pi^3$

Propriedade: $\mathbf{(a^{m})^p = a^{mp}}$

O expoente nos diz quantas vezes a base será multiplicada.

Ex: $(a^3)^2 = a^6$

ou

$(a^3)^2 = a^3 . a^3 = a^{3+3} = a^6$

Ex: $(a^2)^4 = a^8$

ou

$(a^2)^4 = a^2 . a^2 . a^2 . a^2 = a^8$

Propriedade: $\mathbf{(a^m . b^{p})^q = a^{mq} . b^{pq}}$

Ex: $(2^3 . 5^2)^4 = 2^{12} . 5^8$

Importantíssimo: sempre que existir produtos de potências com as bases “2” e “5” podemos obter potência de 10; basta tentar igualar os expoentes.

Veja:

$$2^{12} . 5^8 = 2^4 . 2^8 . 5^8 = 2^4(2 . 5)^8 = 16 . 10^8 = 1600000000$$

Conclusão: o produto $2^{12} . 5^8$ contém 10 algarismos.

$$4^6 . 5^9 = (2^2)^6 . 5^9 = 2^{12} . 5^9 = 2^3 . 2^9 . 5^9 = 2^3(2 . 5)^9 = 8 . 10^9$$

Qual dos números é maior?

6^{200} ou 3^{400}

Vamos igualar os expoentes onde este valor será o M.D.C (600 , 400)

$$6^{200} \qquad (3^2)^{200}$$
$$6^{200} \qquad 9^{200}$$
$$6^{200} < 9^{200}$$

$6 < 9 \longrightarrow 6^{200} < 9^{200}$

Conclusão: sejam a^n e b^n então:

- Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in R +$ e $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ então $\mathbf{a^n > b^n}$

- Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b} \in R$ e $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ então carece de análise; se "n" é par ou ímpar

Propriedade: $a^{n^{p^q}}$

Quando entre os expoentes não existir parênteses então resolva as potências no sentido de uma para baixo onde a base do expoente superior é o numerador imediatamente abaixo.

Ex: $\mathbf{2^{3^2}} = 2^9$

$$\mathbf{2^{2^{2^3}} = 2^{2^8}} = 2^{256}$$

$$2^{3^{2^{0}}} = 2^{3^{1}} = 2^{3} = 8$$

Conclusão: você observou que:

$(2^2)^3 \qquad \neq \qquad 2^{2^{3}}$

$2^6 \qquad\qquad 2^8$

$$\left(3^{2^{3}}\right)^{0} \qquad \neq \qquad 3^{2^{3^{0}}}$$

$(3^8)^0 \qquad \neq \qquad 3^{2^{1}}$

$1 \qquad \neq \qquad 9$

Calcule:

$(0{,}2)^3 + (0{,}04)^2$

$$\left(\frac{2}{10}\right)^{3} + \left(\frac{4}{100}\right)^{2}$$

$$\left(2.10^{-1}\right)^{3} + \left(4.10^{-2}\right)^{2}$$

$$8.10^{-3} + 16.10^{-4}$$

Colocando $8 \, . \, 10^{-4}$ em evidência:

$$8.10^{-4}\left(10^{-1} + 2\right)$$

$$8.10^{-4}.12 \rightarrow 96.10^{-4} \rightarrow \frac{96}{10000} \rightarrow 0{,}0096$$

Solução 1

$(0,2)^3 + (0,04)^2$

$$\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \left(\frac{4}{100}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{25}\right)^2$$

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{625} \rightarrow \frac{5+1}{625} \rightarrow \frac{6}{625}$$

Solução 2

$(0,2)^3 + (0,04)^2$

$$\left(2.10^{-1}\right)^3 + \left(4.10^{-2}\right)^2$$

$$8.10^{-3} + 16.10^{-4}$$

$$8.10^{-3} + 1,6.10^{-3}$$

$$\left(8 + 1,6\right).10^{-3} = 9,6.10^{-3}$$

Solução 3

$(0,2)^3 + (0,04)^2$

$$\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \left(\frac{4}{100}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{25}\right)^2$$

$5^{-3} + 5^{-4}$

$5^{-4}(5^1 + 1)$

$6 . 5^{-4} = \frac{6}{5^4}$

Interessantíssimo: em física e química é comum as operações básicas serem efetuadas através de potência de 10.Veja uma resolução clássica de potências com base decimal:

$(0,002)^4$

Vamos multiplicar o cofator 0,002 por 10^0 , então teremos:

$(0{,}002 \underrightarrow{.\ 10^0\ )^4} \xrightarrow{\text{diminui 3 casas}}$ aumenta

Deslocando a vírgula à direita em 3 casas decimais, o número aumenta; em contra partida, o expoente diminui em 3 unidades:

$(2 \,.\, 10^{0-3})^4$

$(2 \,.\, 10^{-3})^4$

$16 \,.\, 10^{-3}$

Obs: o coeficiente da potência de 20 sempre deverá ser um número no intervalo de 1 a 9 $\mathbf{p \,.\, 10^n}$ **,** isto é, $\mathbf{1 < p < 9}$. Então em $16 \,.\, 10^{-3}$ vamos diminuir uma casa decimal e em contrapartida aumentar uma unidade no expoente:

$1{,}6 \,.\, 10^{-3+1} \quad = \quad 1{,}6 \,.\, 10^{-2}$

Ex: $(0{,}0001)^4$ introduzir 10^0

$(0{,}0001 \,.\, 10^0)^4 \xrightarrow{\text{diminui}}$ aumenta

$(1 \,.\, 10^{0-4})^4$

$(1 \,.\, 10^{-4})^4 = 1 \,.\, 10^{-16}$

Ex$_2$: $\dfrac{\mathbf{10^3.(0{,}01)^{-2}}}{\mathbf{0{,}001}}$

$$\frac{\mathbf{10^3.(1.10^{-2})}}{\mathbf{1.10^{-3}}} \to \frac{\mathbf{10^3.10^{-4}}}{\mathbf{10^{-3}}} \to \mathbf{10^{3+3-4}} \to \mathbf{10^2}$$

Importantíssimo: você deve sempre lembrar que os decimais **0,5 ; 0,25 ; 0,125** e **0,0625** transformam em potência de base **2.**

Veja:

$0{,}5 = \mathbf{\frac{5}{10}} = \mathbf{\frac{1}{2}} = 2^{-1}$

$0{,}25 = \mathbf{\frac{25}{100}} = \mathbf{\frac{1}{4}} = \mathbf{\frac{1}{2^2}} = 2^{-2}$

$0{,}125 = \mathbf{\frac{125}{1000}} = \mathbf{\frac{1}{8}} = \mathbf{\frac{1}{2^3}} = 2^{-3}$

$0{,}0625 = \mathbf{\frac{625}{10000}} = \mathbf{\frac{1}{16}} = \mathbf{\frac{1}{2^4}} = 2^{-4}$

Calcule:

$$\mathbf{\frac{(0{,}2)^3.(0{,}16)^2}{(0{,}25)^4}}$$

$$\mathbf{\frac{\left(0{,}2.10^0\right)^3.\left(0{,}16.10^0\right)^2}{\left(\frac{25}{100}\right)^4}} = \mathbf{\frac{\left(2.10^{-3}\right)^3.\left(16.10^{-2}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^4}} = \mathbf{\frac{2^3.10^{-9}.\left(2^4.10^{-2}\right)^2}{\left(2^{-2}\right)^4}} =$$

$$\mathbf{\frac{2^3.10^{-9}.2^8.10^{-4}}{2^{-8}}} = 2^3 . 2^8 . 2^8 . 10^{-9} . 10^{-4} = 2^{19} . 10^{-13}$$

Exercícios:

I-Simplifique as expressões **a – b ≠ 0**

a- $(a^2 . b^3)^2 . (a^3 . b^2)^3$

b- $\mathbf{\frac{\left(a^4 .b^2\right)^3}{\left(a.b^2\right)^2}}$

c- $[\ (\ a^3 . b^2\ )^2\ ]^3$

d- $\dfrac{(a^2 - b^3)^4 . (a^3 . b^4)^2}{(a^3 . b^2)^3}$

II-Calcule:

a- 3^{-1}

b- $(-2)^{-1}$

c- -3^{-1}

d- $-(-3)^{-1}$

e- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$

f- $\left(\dfrac{-3}{2}\right)^{-3}$

g- $(0,25)^{-3}$

h- $(-0,5)^{-3}$

i- $\dfrac{1}{2^{-3}}$

j- $\dfrac{1}{(0,2)^{-2}}$

k- $\dfrac{1}{(0,01)^{-2}}$

III-Calcular o valor das expressões:

a- $\dfrac{2^{-1} - (-2)^2 + (-2)^{-1}}{2^2 + 2^{-2}}$

b- $\dfrac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 . \left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{\left[\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2\right]^3}$

IV-Classificar em verdadeiro(V) ou falso(F):

a- $(5^3)^{-2} = 5^{-6}$

b- $2^{-4} = 16$

c- $\frac{7^{-2}}{7^{-5}} = 7^{-3}$

d- $\square^{-1} + \square^{-1} = 1$

V-Simplificar as expressões:

a- $a^{2n+1}.a^{1-n}.a^{3-n}$

b- $a^{2n+3}.a^{n-1}$

c- $\frac{a^{n+4} - a^{3}.a^{n}}{a^{4}.a^{n}}$

VI-Dos números abaixo, o que está mais próximo de $\frac{(5.2)^4.(10.3)^3}{(9.9)^2}$ é:

a- 0,625 b- 6,25 c- 62,5 d- 625

VII-Se $2^8 . 5^5 = 0,8 . 10^n$, então "n" é igual a:

a- 6 b- 5 c- -1 d- 2 e- -3

VIII-Simplifique:

a- $\frac{2^{n+4} - 2.2^{n}}{2.2^{n+3}}$

IX- Para todo **n , ($2^n + 2^{n-1}$) ($3^n - 3^{n-1}$)** é igual a:

a- 6^n b- 1 c- 0

d- $2^n . 3 + 2 . 3n$ e- $2^n . 3^{n-1} + 2^n . 3^n$

X-Simplifique:

a- $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x.y)^{-1}}$

XI-Efetue:

a- $\dfrac{1}{3}(0{,}01.0{,}12)+(0{,}14)^2+\sqrt{0{,}04}$

XII-Seja M = $\left[\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2}\right]^{1,5}.(0{,}6)^{-2}$. Em que intervalo M está?

a- M < $\dfrac{-5}{3}$ b- -1 < M < 0 c- 0 < M < $\dfrac{1}{3}$

d- $\dfrac{1}{2}$ < M < $\dfrac{4}{5}$ e- M > 2

XIII-Se 27 . 32 = 6^k , o valor de k é:

a- 15 b- 6 c- 8 d- 0

Comentário: observe que se a base fosse um valor negativo ao ser elevado ao expoente par, ela se tornaria positiva, satisfazendo tanto ao radicando quanto à raiz:

$\sqrt{(-2)^4}$ = (-2)^2 $\longrightarrow$ $\sqrt{+16}$ = +4

<u>Lembre-se bem disso</u>: **toda raiz de índice par, sua raiz enésima será sempre positiva.**

2º Caso: $\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n}$

Se "n" e "p" tem representação par e a razão $\dfrac{n}{p}$ = 2k + 1 (ímpar), então o domínio de x deverá ser analisado.

Veja:

$\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n}$ onde $\dfrac{p}{n} = 2k + 1$

$$\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n} = x^{2k+1}$$

$$\sqrt[n]{x^p} = x^{2k} \,.\, x^{+1}$$

Observe que sendo "p" um número par, então:

$x^p = +$

$x^{2k} = +$

Nos restou apenas x^1 , onde x somente deverá assumir valores positivos.

Ex$_1$ $\sqrt{x^6} = x^3$ esta sentença será verdadeira somente $\forall x \in$ R+ (leia-se: para todo "x" pertencente aos reais positivo)

Ex$_2$ $\sqrt{x^6} = -x^3$ esta sentença será verdadeira somente $\forall x \in$ R-

Realmente se atribuirmos valores negativos a "x" obteremos:

$(-2)^6 = +64 \longrightarrow$ satisfaz o radicando

$-(-2)^3 = -(-8) = +8 \longrightarrow$ satisfaz também a sua raiz

Radiciação

O que é preciso saber

Seja: $\sqrt[n]{x^p}$

Se “n” é ímpar, então:

$\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n} = \forall x \in \mathrm{R}$ (é verdadeiro para todo “x” pertencente aos reais)

Ex: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-1.8} = \sqrt{[(-1)(2)]^3} = \sqrt{\left[(-1)^3(2)^3\right]} = -1.3 = -3$

Se “n” e “p” tem representação par, então a raiz enésima de “x^p” sempre será positiva. O domínio de “x” vai depender da razão p/n , isto é:

$\sqrt[n]{x^p} = x^{p/n}$ somente se obedecer os casos abaixo:

1º Caso: se “p” é par e “n” também é par, sendo p/n par, isto é, $\frac{p}{n} = 2k$, então $\sqrt[n]{x^p} = x^{2k}$, esta sentença é verdadeira para todo “x” pertencente aos reais.

Ex: $\sqrt{x^4} = x^2 \qquad \forall x \in \mathrm{R}$

Propriedades da radiciação

Seja:

$A \geq 0$ $\sqrt[n]{A}$

$\sqrt{\ }$ ⟶ raiz
A ⟶ radicando
n ⟶ índice

***Importantíssimo*: o primeiro passo a ser feito para aplicarmos as propriedades de radiciação é <u>fatorar</u>, isto é, decompor em fatores primos o radicando (*A*)**

Ex: $\sqrt[3]{64}$

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 4$

Propriedade: $\sqrt[n]{a^p . b^q} = a^{p/n} . b^{q/n}$

Ex: $\sqrt{36}$

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$\sqrt{36} = \sqrt{2^2 . 3^2}$
$2^{2/2} . 3^{2/2} = 2 . 3 = 6$

Propriedade: seja $\sqrt[n]{a^p}$ se p > n e "p" não é divisível por "n" , então procure um múltiplo de "n" abaixo do valor de "p"

Ex: $\sqrt[5]{2^{12}} = \sqrt[5]{2^{10} . 2^2} = \sqrt[5]{2^{10}} . \sqrt[5]{2^2} = 2^2 . \sqrt[5]{2^2} = 4 . \sqrt[7]{a^4}$

$\sqrt[7]{a^{18}} = \sqrt[7]{a^{14} . a^4} = \sqrt[7]{a^{14}} . \sqrt[7]{a^4} = a^2 . \sqrt[7]{a^4}$

Propriedade: $\sqrt[n]{a^n.b^n} = \sqrt[n]{(a.b)^n} = a.b \qquad (a \geq ; b \geq 0)$

Comentário: se os expoentes das bases são iguais então coloque-o em evidência; isto nos facilita e muito.

Ex: $\sqrt{700} = \sqrt{7.2^2.5^2} = \sqrt{7(2.5)^2} = \sqrt{7.10^2} = 10\sqrt{7}$

$$\sqrt{\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{2^4}{3^4}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Propriedade: $p.\sqrt[n]{a} + q.\sqrt[n]{a}$

Coloque $\sqrt[n]{a}$ em evidência:

$\sqrt[n]{a}(p+q)$

Ex: $\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{72} - \sqrt{50}$

$$\sqrt{2^3} + \sqrt{2^5} + \sqrt{2^3.3^2} - \sqrt{5^2.2}$$

$$\sqrt{2^2.2} + \sqrt{2^4.2} + \sqrt{2.2^2.3^2} - \sqrt{5^2.2}$$

$$2\sqrt{2} + \sqrt{2^4.2} + \sqrt{2.2^2.3^2} - 5\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} + 2.3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}(2+4+6-5) = 7\sqrt{2}$$

Importantíssimo: quando existir apenas produto e (ou) divisão de radicais é preferível transformar todas as raízes em forma de potência.

Veja:

$$\frac{\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2^{1/2}.2^{1/3}}{2^{1/4}} = 2^{1/2+1/3-1/4}$$

$$2^{\frac{6+4-3}{12}} = 2^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{2^7}$$

Ex$_2$ $$\frac{\sqrt[4]{5}.\sqrt[3]{6}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt[4]{5}.\sqrt[3]{2.3}}{\sqrt{3.5}} = \frac{5^{1/4}.2^{1/3}.3^{1/3}}{3^{1/2}.5^{1/2}} = 5^{1/4}.5^{1/2}.2^{1/3}.3^{1/3}.3^{-1/2}$$

$$5^{\frac{3-6}{12}}.2^{\frac{4}{12}}.3^{\frac{4-6}{12}} = 5^{-3/12}.2^{4/12}.3^{-2/12}$$

$$\frac{2^{4/12}}{5^{3/12}.3^{2/12}} = \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{5^3}.\sqrt[12]{3^2}} = \sqrt{\frac{16}{125.9}}$$

Propriedade: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n.p]{a}$ $\qquad$ $a > 0$

Vamos demonstrar:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^1}} = \sqrt[n]{\left(a^{1/p}\right)^1} = \left(a^{1/p}\right)^{1/n} = a^{\frac{1}{p.n}} = \sqrt[np]{a^1}$$

Ex$_1$: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[6]{5}$ ou $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5^1}} = \sqrt[3]{\left(5^{1/2}\right)^1} = \left(5^{1/2}\right)^{1/3} = 5^{1/6} = \sqrt[6]{5}$

Ex$_2$: $\sqrt[3]{\sqrt{5}}.\sqrt[5]{5} = \sqrt[6]{5}.\sqrt[5]{5} = 5^{1/2}.5^{1/5} = 5^{\frac{5+6}{30}} = 5^{11/30} = \sqrt[30]{5^{11}}$

Propriedade: seja $\sqrt[n]{a^p}$ se "n" e "p" possuem divisores em comum, então simplifique-os.

Ex: $\sqrt[12]{16} = \sqrt[12\div4]{2^{4\div4}} = \sqrt[3]{2^1}$

Comentário: quando o radicando é um número real positivo a simplificação é possível e imediata. Mas quando é uma variável então a simplificação somente será possível se a base de radicando é positiva.

Ex: $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{a}$ somente se $a \geq 0$

$\forall a \in$ R+

Se $a < 0 = \sqrt[12]{a^4} \neq \sqrt[3]{a}$

Os domínios são diferentes, isto é, para $\sqrt[12]{a^4}$ qualquer que seja a∈R- ou a∈R+ a operação é satisfeita. Mas $\sqrt[3]{a}$ somente é satisfeita para a∈R+.

Conclui-se que: $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{a}$ somente se a∈R+

Agora se o índice é ímpar a simplificação é possível e imediata,e válida para todos os valores dos reais.

$\sqrt[15]{a^3} = \sqrt[5]{a^1}$ $\qquad a \in$ R

Racionalização

Racionalizar é o ato de tornar o expoente do denominador um valor inteiro.

Veja:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{1/2}}$$

Se multiplicarmos o denominador e o numerador por $3^{1/2}$ o resultado será imediato.

$$\frac{1}{3^{1/2}} . \frac{3^{1/2}}{3^{1/2}} = \frac{3^{1/2}}{3^{1/2+1/2}} = \frac{3^{1/2}}{3^{1}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Comentário: calculando $\sqrt{3}$ = 1,732

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1{,}732} = 0{,}577$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1{,}732}{3} = 0{,}577$$

Ou seja, $1/\sqrt{3}$ é o mesmo que $\sqrt{3}/3$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3 = $\sqrt{3}.\sqrt{3}$

3 = 3

Generalizando:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^{p}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-p}}}{a}$$

Vamos demonstrar:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{1}{a^{p/n}} \cdot \frac{a^{1-p/n}}{a^{1-p/n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{a^{\frac{n-p}{p}}}{a^{p/n} . a^1 . a^{-p/n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{a^{\frac{n-p}{p}}}{a}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{\sqrt[p]{a^{n-p}}}{a}$$

Ex$_1$ $\frac{2}{\sqrt[5]{9}} = \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2.\sqrt[5]{3^{5-2}}}{3} = \frac{2.\sqrt[5]{3^3}}{3}$

Ex$_2$ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt{3}.\frac{\sqrt[3]{3^{3-1}}}{3} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{3^2}}{3} =$

$$\frac{3^{1/2}.3^{2/3}}{3} = 3^{1/2}.3^{2/3}.3^{-1} = 3^{\frac{3+4-6}{6}} = 3^{1/6} = \sqrt[6]{3}$$

Importantíssimo: se $x^n = K$ e "n" é ímpar; então:

$x^n = K$

$x = K^{1/n}$

$\boldsymbol{x = \sqrt[n]{K}}$ $\boldsymbol{K} \in$ R

Se $\boldsymbol{x^n = K}$ e “n” é par:

$\boldsymbol{x^n = K}$

$\boldsymbol{x = K^{1/n}}$

$\boldsymbol{x = \sqrt[n]{K}}$ onde $\boldsymbol{K} \in$ R+

Leia-se: a raiz enésima de **K** é o valor modular de **x**, isto é, qualquer valor que atribuirmos a **x**, seja ele positivo ou negativo, obtemos sempre um valor positivo, isto é **| -2 | = +2** e **| +2 | = +2**

Ex: $\boldsymbol{x^2 = 25}$

$\boldsymbol{x = 25^{1/2}}$ (Seja **x = -5** ou **x = +5** sempre vamos obter o seu valor modular, que é **+5**)

$\boldsymbol{x = \sqrt{25}}$

$\boldsymbol{x = 5}$

Lembrete: para aplicar as propriedades de potenciação com números decimais ou dízima, transforme-os sempre em fração.

Ex$_1$: $\boldsymbol{\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}}$

Ex$_2$: $\boldsymbol{81^{0{,}25} = 81^{\frac{25}{100}} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3}$

Ex$_3$: $\mathbf{0{,}001^{0{,}333...}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{3/9} = \left(\frac{1}{10^3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{10^3}} = \frac{1}{10}$

Curiosidade: $\sqrt[n]{p} = q$

Se **p > 1** então **p > q**

$\sqrt{25} = 5$ $\qquad\qquad$ **25 > 5**

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad\qquad$ **8 > 2**

Mas para $\sqrt[n]{p} = q$ onde $0 < p < 1$

$\sqrt{0{,}25} = 0{,}50$ $\qquad\qquad$ **0,25 > 0,50**

$\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}500$ $\qquad\qquad$ **0,125 < 0,500**