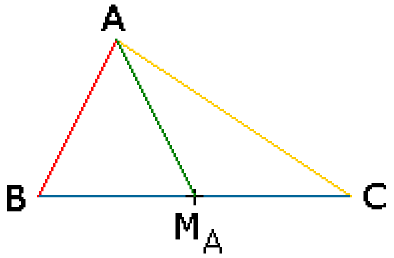
Mediana , Altura , Bissetriz e Mediatriz de um Triângulo

Mediana

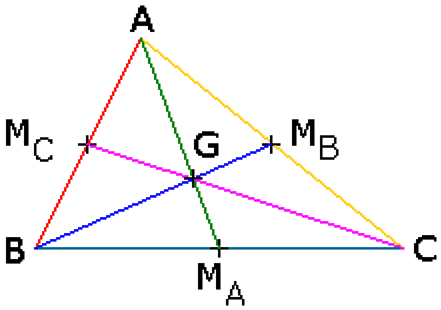
Definição: Denomina-se mediana de um triângulo o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto a este vértice.



$\overline{AM_A}$ é mediana do triângulo relativa ao vértice A .

Obviamente o triângulo possui **3** medianas, uma para cada vértice. O encontro das **3** medianas ocorre em um ponto denominado **Baricentro**.

Baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção das suas medianas.



G é o Baricentro do Δ ABC.
$\overline{AM_A}$, $\overline{BM_B}$, $\overline{CM_C}$ são as medianas do Δ ABC.

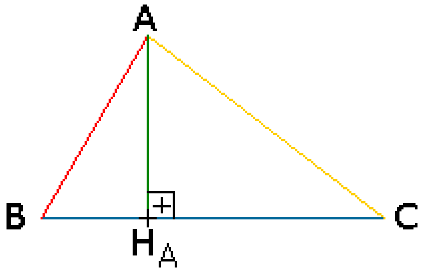
$$\overline{AM_A} \cap \overline{BM_B} \cap \overline{CM_C} = \{ G \}$$

O **Baricentro** é conhecido como centro de massa ou centro de gravidade, por este motivo adota-se a letra **G** para representá-lo.
O ponto **G** divide as medianas em dois segmentos tais que a parte que contém o vértice é igual ao dobro da outra.

Portanto temos: **$AG = 2 . GM_A$** , **$BG = 2 . GM_B$** e **$CG = 2 . GM_C$**

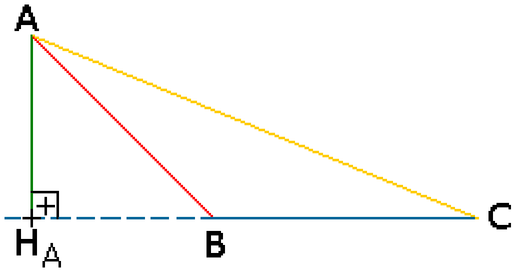
Altura

Definição: Denomina-se **altura** de um triângulo o segmento de reta que é perpendicular a um lado e contém o vértice oposto a este lado.



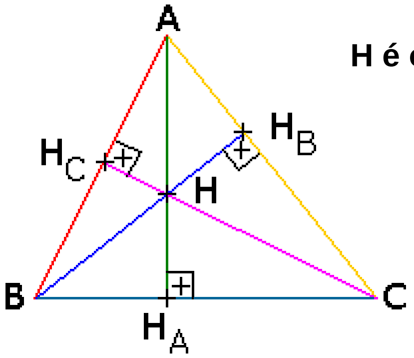
$\overline{AH_A}$ **é a altura do triângulo relativa ao vértice A .**

Note que a **altura** pode ser externa ao triângulo, como na figura abaixo:



O ponto H_A é externo.

Define-se **Ortocentro** de um triângulo como sendo a intersecção das retas que contém as **Alturas** deste triângulo.



H é o Ortocentro do Δ ABC.

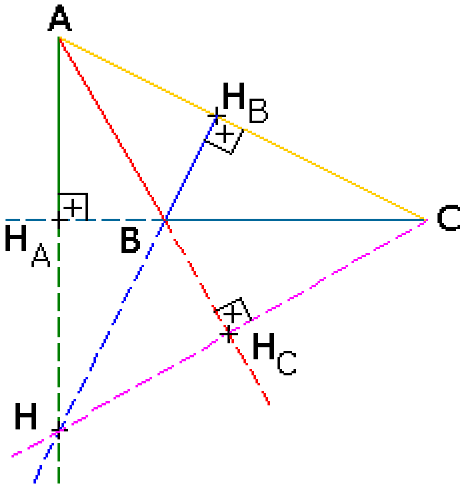
$\overline{AH_A}$ **,** $\overline{AH_B}$ **e** $\overline{AH_C}$ **são as alturas do Δ ABC .**

$\overleftrightarrow{AH_A}$, $\overleftrightarrow{AH_B}$ **e** $\overleftrightarrow{AH_C}$

são as retas que contém as alturas .

$$\overleftrightarrow{AH_A} \cap \overleftrightarrow{AH_B} \cap \overleftrightarrow{AH_C} = \{ H \}$$

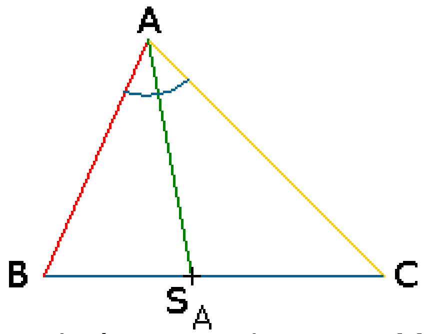
Note que o ponto **H (ortocentro)** pode ser externo ao triângulo, conforme a figura abaixo:



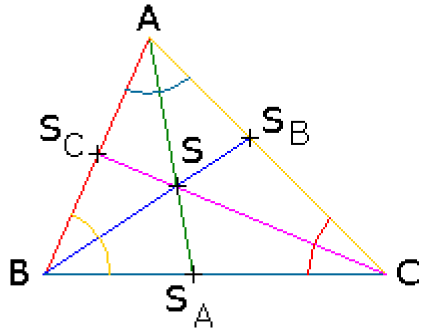
Como você pode ver o ponto **H** pertence às retas que contém os segmentos das **alturas** , **H** **<u>não</u>** é o ponto de encontro das alturas e sim das retas que contém as alturas.

Bissetriz:

Definição: Denomina-se **bissetriz** do ângulo interno de um triângulo o segmento de reta que divide o ângulo interno em duas metades iguais.



Note que a **bissetriz** de um ângulo é uma semi-reta e a **bissetriz** de um triângulo é um segmento, note ainda que o triângulo possui três **bissetrizes internas**, uma para cada vértice.
Incentro é o ponto de intersecção das **bissetrizes internas** de um triângulo.



ncentro do Δ ABC.

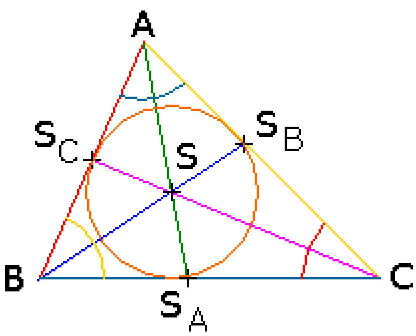
$\overline{BS_B}$ **,** $\overline{CS_C}$ **são as**

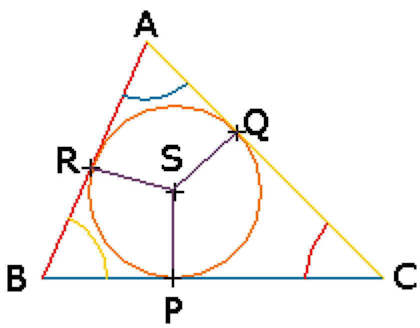
do Δ ABC.

$$\overline{AS_A} \cap \overline{BS_B} \cap \overline{CS_C} = \{ S \}$$

Propriedades:

1) O **Incentro** é o **centro da circunferência** inscrita no triângulo.





S é o centro da circunferência inscrita no triângulo , ou seja , a circunferência tangência os lados do triângulo nos pontos **P , Q** e **R .** Então: **SP = SQ = SR**

2) As distâncias dos vértices aos pontos de tangência dos lados pertencentes a este vértice são congruentes.

$$\begin{cases} AR = AQ \\ BR = BP \\ CP = CQ \end{cases}$$

Demonstração:

Vamos demonstrar para um vértice ; para os demais vale o mesmo procedimento.

$$\Delta\, \mathbf{ARS} \equiv \Delta\, \mathbf{AQS}$$

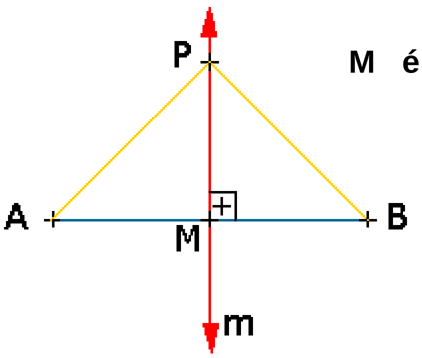
$$\begin{cases} AS \ \text{ é comum} \\ SR = SQ \ \text{ raio da circunferência} \\ A\hat{R}S = A\hat{Q}S \ \text{ ângulo reto no ponto de tangência} \end{cases}$$

Pelo caso especial de **LLA** para triângulos retângulos , $\Delta\, \mathbf{ARS} \equiv \Delta\, \mathbf{AQS} \Rightarrow$

AR = AQ c.q.d.

Mediatriz:

Definição: Denomina-se **mediatriz** de um segmento de reta, a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.



M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

m é perpendicular a $\overline{AB}$.

m é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Propriedade: Se **P** $\in$ **m** , então $\overline{\mathbf{PA}} \equiv \overline{\mathbf{PB}}$

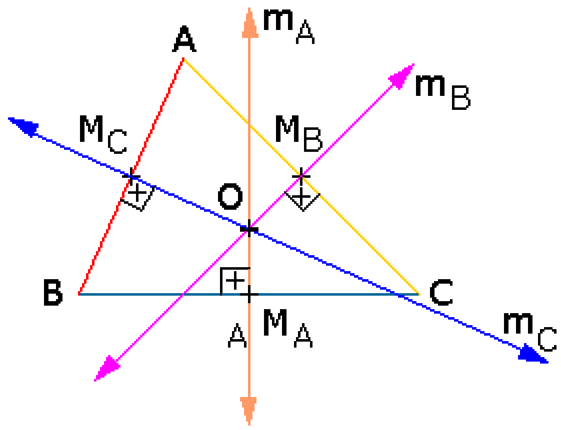
Prova: $\forall\ \mathbf{P}\ ,\ \ \mathbf{P} \in \mathbf{m} \ \Rightarrow\ \overline{\mathbf{PA}} \equiv \overline{\mathbf{PB}}$

$$\begin{cases} \overline{MA} \equiv \overline{MB} \ \text{ pois M é o ponto médio de AB} \\ A\hat{M}P \equiv B\hat{M}P \ \text{ ângulo reto pois m é perpendicular a } \overline{AB} \\ \overline{MP} \ \text{ é comum} \end{cases}$$

Por **LAL** $\Delta\, \mathbf{PMA} \equiv \Delta\, \mathbf{PMB} \Rightarrow \overline{\mathbf{PA}} \equiv \overline{\mathbf{PB}}$ **c.q.d.**

Obs: Em um triângulo existem **3** mediatrizes, uma para cada lado.

Circuncentro de um triângulo é o ponto de intersecção das mediatrizes dos seus lados.



O é o circuncentro do Δ ABC.

m_A , m_B e m_C são as mediatrizes do Δ ABC.

$$m_A \cap m_B \cap m_C = \{O\}$$

Propriedades:

1) O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo.

Demonstração:

Se $\{O\} = m_A \cap m_B \cap m_C$ por definição então:

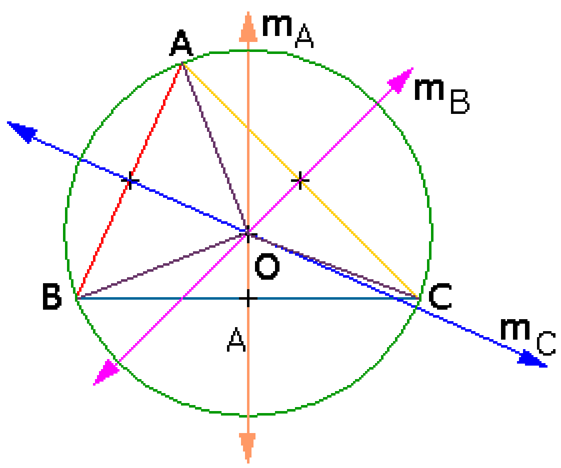
$$O \in m_A \quad \Rightarrow \quad \overline{OB} \equiv \overline{OC}$$

$$O \in m_B \quad \Rightarrow \quad \overline{OA} \equiv \overline{OC}$$

$$O \in m_C \quad \Rightarrow \quad \overline{OA} \equiv \overline{OB}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \quad \Rightarrow \quad R = OA = OB = OC$$

Portanto uma circunferência de centro **O** e raio **R** passa por **A , B e C** em circunscreve o **Δ ABC. c.q.d.**



O é o centro da circunferência que contém **A**, **B** e **C** e **OA = OB = OC.**

2) O circuncentro pode ser externo ao triângulo e isto ocorre quando este é obtusângulo.

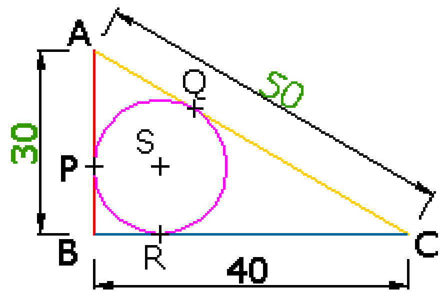
Casos especiais

1) Em um **triângulo equilátero** as **medianas alturas** , **mediatrizes** e **bissetrizes** são coincidentes, o que implica que o **baricentro**, **ortocentro**, **circuncentro** e **incentro** também coincidem.

2) Em um **triângulo isósceles** , o **baricentro** , **ortocentro** , **circuncentro** e **incentro** estão alinhados.

Exemplos:

1) Em um triângulo retângulo de lados **30** , **40** e **50** , inscrevemos uma circunferência, qual é o seu raio?

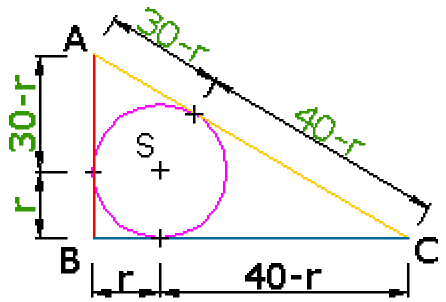


Pelas propriedades do **incentro** temos:**AP = AQ BP = BR CR = CQ**

Como Δ **ABC** é retângulo em **B** , então:

SR = SP = BP = BR = r (raio da circunferência inscrita)

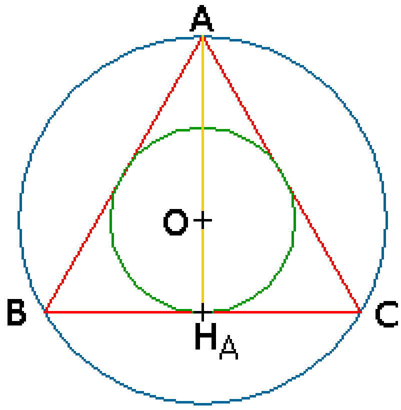
Então temos:



Portanto **30 - r + 40 - r = 50**

20 = 2r $\Rightarrow$ r = 10

2) Obter o raio das circunferências inscritas e circunscritas em um triângulo equilátero de altura **21 cm.**



Como no triângulo equilátero, o baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro coincidem, podemos obter o centro das circunferências pela propriedade do baricentro.

Ou seja: $\mathbf{AO = 2 \cdot OH_A}$ e $\mathbf{AO + OH_A = 21}$

$\mathbf{30\,H_A = 21 \quad OH_A = 7}$ **e** $\mathbf{AO = 14}$

Portanto o raio da circunferência inscrita é **7** cm e o raio da circunferência circunscrita é **14** cm.