
INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA FINANCEIRA

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

2 de setembro de 2005

Sumário

1	Valor Futuro e Valor Presente de uma Quantia	3
2	Períodos não Inteiros - Taxas Equivalentes	5
3	Valor Futuro e Valor Presente de uma Série de Pagamentos Iguais	7
4	Sistema de Financiamento com Prestações Constantes	11
4.1	Sem Entrada	11
4.2	Com Entrada	14
5	Sistema de Financiamento com Amortizações Constantes	18
5.1	Tabela de Amortização	18
6	Páginas Interativas	20
7	Respostas dos Exercícios	21
	Referências	22

1 Valor Futuro e Valor Presente de uma Quantia

Em um regime com uma taxa de juros j por período (período aqui pode ser um mês, um ano, etc), o valor futuro de uma quantia q_0 depois de um período é igual a

$$q_1 = q_0 + j \cdot q_0 = (1 + j)q_0. \quad (1)$$

Aplicando-se o raciocínio acima, sucessivas vezes, temos que, se no presente eu tenho uma quantia q_0 , então no futuro, depois de n períodos, a uma taxa de juros j por período, esta quantia vai valer

$$q_n = (1 + j)^n q_0. \quad (2)$$

Reciprocamente, se daqui a um período eu tenho uma quantia q_1 , então de (1) segue que ela vale hoje, no presente,

$$q_0 = (1 + j)^{-1} q_1.$$

Se depois de n períodos eu tenho uma quantia q_n , segue de (2) que esta quantia vale hoje

$$q_0 = (1 + j)^{-n} q_n.$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web para fazer a atualização monetária de um valor, ou seja, se você sabe o valor de uma quantia hoje, o programa diz quanto ela valerá no futuro e reciprocamente, se você sabe o valor de uma quantia no futuro, ele diz quanto ela vale hoje. [Clique aqui](#) para experimentar o programa.

Exercício 1. Uma loja oferece duas opções de pagamento: à vista com 2% de desconto ou em duas vezes, sem desconto, a primeira sendo paga no ato da compra. Qual a taxa de juros mensal que está embutido na venda a prazo? Resposta na página [21](#).

Exercício 2. Investindo uma quantia q (uma única vez!) a uma taxa de juros mensal de 1% , em quanto tempo o seu capital dobrará? Resposta na página [21](#).

2 Períodos não Inteiros - Taxas Equivalentes

Se uma taxa de juros relativamente a um determinado período é J , então a taxa correspondente a uma fração $1/n$ deste período, j , é obtida da forma que descreveremos a seguir. Como já vimos, o valor futuro de uma quantia q após o período inteiro é

$$(1 + J)q.$$

Por outro lado, o período inteiro é igual a n frações $1/n$ deste período e se a taxa correspondente a fração $1/n$ do período é j , então o valor futuro de uma quantia q após n frações $1/n$ do período é

$$(1 + j)^n q.$$

Portanto,

$$(1 + J)q = (1 + j)^n q,$$

ou seja, a taxa correspondente a um período J e a taxa correspondente a uma fração $1/n$ deste período satisfazem

$$1 + J = (1 + j)^n.$$

Neste caso, as taxas J e j são ditas **equivalentes**.

Portanto, se J é a taxa de juros correspondente a um período inteiro, então a taxa, j , correspondente a uma fração $1/n$ deste período é dada por

$$j = (1 + J)^{1/n} - 1.$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web para fazer a atualização monetária de um valor em divisões de um período, ou seja, se você sabe o valor de uma quantia

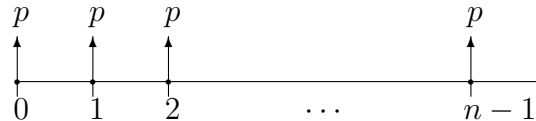
hoje, o programa diz quanto ela valerá no futuro em divisões de um período, no qual é conhecida a taxa de juros. [Clique aqui](#) para experimentar o programa.

Exercício 3. Se a taxa de juros de um cheque especial é de 10% ao mês, qual é a taxa equivalente a um dia? Se o meu cheque especial fica negativo no valor de R\$ 300,00 por 3 dias quanto devo pagar de juro? (chamamos de **juro** a diferença entre o valor futuro e o valor presente de uma quantia)

Exercício 4. Se em um financiamento está escrito que a taxa de juros **nominal** anual é de 12% , isto significa que a taxa mensal é igual a 1 % . Outra forma, é dizer que a taxa é de 12% ao ano com capitalização mensal. Qual é a taxa de juros **real** anual neste caso?

3 Valor Futuro e Valor Presente de uma Série de Pagamentos Iguais

Suponha que depositamos todo mês uma quantia fixa p numa caderneta de poupança que remunera a uma taxa fixa mensal igual j . Qual será o saldo após n meses?



Após o primeiro mês, o saldo é de $(1 + j)p$ mais o depósito do segundo mês p . Após o segundo mês, o saldo é de $(1 + j)^2p + (1 + j)p$ mais o depósito do segundo mês p . E assim por diante, após n meses o saldo é

$$s_n = (1 + j)^n p + (1 + j)^{(n-1)} p + \cdots + (1 + j)p$$

Assim, o saldo em n meses após n pagamentos iguais a p é dado por uma soma de uma progressão geométrica, que é dada por

$$s_n = (1 + j) \frac{(1 + j)^n - 1}{j} p$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web que dá o valor desta soma, ou seja, se você fornece o valor do depósito por período, o programa diz qual o saldo após n períodos e reciprocamente, se você fornece o saldo após n períodos, ele diz quanto deverá ser

o valor do depósito por período para que em n períodos se alcance aquele saldo. [Clique aqui](#) para experimentar o programa.

Exercício 5. Suponha que uma pessoa deposite mensalmente 10 % de seu salário numa caderneta de poupança, que rende 1 % ao mês, pensando em se aposentar em 20 anos. Quantos salários ela terá disponível após este período?

Suponha, agora, que eu tenha uma caderneta de poupança, que rende juros mensais j , com um saldo inicial s_0 e que todo mês eu faça uma retirada de p . Após a retirada do primeiro mês, o saldo será $s_1 = (1 + j)s_0 - p$. Após a retirada do segundo mês, o saldo será de $s_2 = (1 + j)s_1 - p = (1 + j)^2 s_0 - [(1 + j)p + p]$. Após a retirada do n -ésimo mês o saldo será

$$s_n = (1 + j)^n s_0 - [(1 + j)^{n-1} + \dots + (1 + j)p + p].$$

ou seja,

$$s_n = (1 + j)^n s_0 - \frac{(1 + j)^n - 1}{j} p.$$

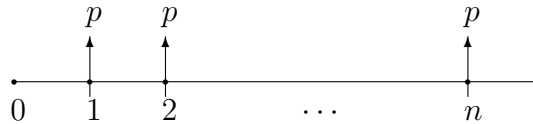
Se após n meses o saldo é igual a zero, então o valor da retirada, p , deve ser

$$p = \frac{j}{1 - (1 + j)^{-n}} s_0.$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web que dá o saldo após cada retirada, ou seja, se você fornece o valor do saldo inicial e a taxa de juros, o programa diz o valor da retirada mensal e o saldo após cada retirada para que após n períodos o saldo seja igual a zero. [Clique aqui](#) para experimentar o programa.

Exercício 6. Se após anos de depósitos em uma caderneta de poupança, que rende 1% ao mês, uma pessoa conseguiu um saldo igual a 100 salários seus. Quanto tempo este saldo poderá pagar a sua aposentadoria integral?

Agora, vamos considerar o problema de um financiamento de uma quantia q em n parcelas iguais a p , a uma taxa de juros por período igual a j .



Para determinarmos o valor atual q , correspondente a uma série de pagamentos iguais a p , vamos considerar todos os pagamentos no instante zero. A primeira parcela vale $(1 + j)^{-1}p$ no instante zero. A segunda parcela vale $(1 + j)^{-2}p$, a terceira, $(1 + j)^{-3}p$ e assim por diante. A n -ésima parcela vale no instante zero $(1 + j)^{-n}p$. Assim,

$$q = (1 + j)^{-1}p + (1 + j)^{-2}p + \cdots + (1 + j)^{-n}p.$$

Assim, uma série de pagamentos iguais a p , num regime de juros j por período, corresponde a um valor à vista é o resultado de uma soma de uma progressão geométrica, que é dada por

$$q = \frac{1 - (1 + j)^{-n}}{j}p$$

Exercício 7.

Exercício 8. Um telefone sem fio é vendido por uma loja em duas opções: $9 \times \text{R\$ } 24,70$ (com entrada) ou $\text{R\$ } 168,00$ à vista. Se você tem a opção de aplicar o seu dinheiro a uma taxa de juros mensal de 1% , qual a forma de pagamento mais vantajosa neste caso. Justifique. (Sugestão: calcule o valor atual das nove parcelas $(1+8)$ num regime de taxa de juros de 1% ao mês e compare com o valor à vista.)

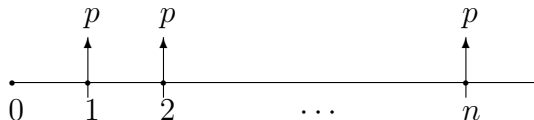
4 Sistema de Financiamento com Prestações Constantes

Este sistema de financiamento é conhecido como **Sistema Francês** ou **Tabela Price**.

4.1 Sem Entrada

Como já vimos na seção anterior, se uma quantia q é financiada em n parcelas iguais a p , a uma taxa de juros por período igual a j , então

$$q = \frac{1 - (1 + j)^{-n}}{j} p \quad (3)$$



Exercício 9. Mostre que se uma quantia q é financiada em n parcelas iguais a p , a uma taxa de juros por período igual a j , então o valor da prestação é dada por

$$p = \frac{j}{1 - (1 + j)^{-n}} q$$

Exercício 10. Uma bicicleta é vendida numa loja com duas opções de pagamento: à vista por R\$ 129,00 ou em 0+4 pagamentos com juros de 4,85 % de juros ao mês. Qual o valor da prestação na segunda opção de pagamento?

Vamos calcular a tabela de amortização de um financiamento com prestações constantes, sem entrada.

Cada prestação é composta de uma parcela de juro e uma parcela de **amortização** (diminuição na dívida), ou seja, para $k = 1, \dots, n$,

$$p_k = j_k + a_k$$

O juro é calculado sobre o saldo devedor no mês anterior, ou seja,

$$j_k = j \cdot d_{k-1},$$

onde j é a taxa de juros e d_{k-1} é o saldo devedor no mês $k - 1$. E assim, a amortização é igual a

$$a_k = p_k - j_k.$$

O saldo devedor imediatamente depois de paga a parcela p_k é igual a

$$d_k = d_{k-1} - a_k.$$

Exercício 11. Prove a seguinte fórmula para o saldo devedor d_k :

$$d_k = (1 + j)d_{k-1} - p_k.$$

Qual o significado desta fórmula?

Escrevemos um programa que roda em uma página na web para fazer o cálculo das prestações e da tabela de amortização para os dois sistemas de financiamento: tabela price e sistema SAC (que veremos mais adiante). [Clique aqui](#) para experimentar o programa.

Exercício 12. Escreva a tabela de amortização do Exercício 10.

Agora, vamos considerar o problema inverso, suponha que conhecemos o valor do débito inicial d_0 e o valor das prestações fixas e queremos determinar a taxa de juros embutida no financiamento. Para isto temos que resolver a equação (3):

$$q = \frac{1 - (1 + j)^{-n}}{j} p$$

para j . Observe que esta não é uma equação simples de se resolver para n maior que 2. No caso geral precisamos usar um método para resolver esta equação de forma aproximada. Vamos usar um método iterativo chamado **método de Newton**. Um método iterativo começa com uma aproximação inicial da solução, x_0 , e gera uma nova aproximação a partir da anterior. Este processo é repetido, até que se atinja a precisão desejada ou que um número máximo de iterações seja atingido. No caso do método de Newton, se x_{k-1} é a aproximação anterior, a nova aproximação da solução de $F(x) = 0$ é a solução de uma aproximação linear da equação, ou seja, a solução de

$$F'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + F(x_{k-1}) = 0,$$

onde F' é a derivada de F . Assim, a aproximação x_k é dada por

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})}.$$

Neste caso específico

$$F(x) = \frac{1 - (1 + x)^{-n}}{x} p - q.$$

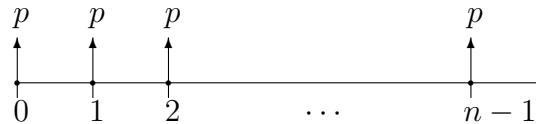
e a derivada de $F(x)$

$$F'(x) = p \left(\frac{n(1+x)^{-(n+1)}}{x} - \frac{1 - (1+x)^{-n}}{x^2} \right).$$

Escrevemos um programa que roda em uma página da web, que usa este método para determinar a taxa de juros. [Clique aqui](#) para experimentar o programa.

Exercício 13. Verifique que realmente a taxa de juros do exemplo anterior é 4,85 % .

4.2 Com Entrada



Este caso é semelhante ao anterior, apenas substituindo n por $n-1$ e q por $q-p$ na equação (3), pois o número de parcelas do financiamento é realmente $n-1$ e não n e o valor a ser financiado é realmente $q-p$ e não q . Assim, para determinarmos o valor da prestação p basta resolvermos a equação

$$q - p = \frac{1 - (1+j)^{-(n-1)}}{j} p$$

para p .

Exercício 14. Mostre que se uma quantia q é financiada em n parcelas iguais a p , a uma taxa de juros por período igual a j , sendo a primeira paga no ato do financiamento, então o valor da prestação é dada por

$$p = \frac{j}{1 + j - (1 + j)^{-(n-1)}} q \quad (4)$$

Exercício 15. Uma bicicleta é vendida numa loja com duas opções de pagamento: à vista por R\$ 129,00 ou em 1+3 pagamentos com juros de 4,85 % de juros ao mês. Qual o valor da prestação na segunda opção de pagamento?

Para calcular a tabela de amortização de um financiamento com prestações constantes, com entrada, o processo é o mesmo que sem entrada. Vamos repetir para enfatizar o processo.

Cada prestação é composta de uma parcela de juro e uma parcela de **amortização** (diminuição na dívida), ou seja, para $k = 1, \dots, n$,

$$p_k = j_k + a_k$$

O juro é calculado sobre o saldo devedor no mês anterior, ou seja,

$$j_k = j \cdot d_{k-1},$$

onde j é a taxa de juros e d_{k-1} é o saldo devedor no mês $k - 1$. E assim, a amortização é igual a

$$a_k = p_k - j_k.$$

O saldo devedor imediatamente depois de paga a parcela p_k é igual a

$$d_k = d_{k-1} - a_k.$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web para fazer o cálculo das prestações e da tabela de amortização para os dois sistemas de financiamento: tabela price e sistema SAC. [Clique aqui](#) para experimentar o programa.

Exercício 16. Escreva o exemplo da tabela de amortização do Exercício 15.

Agora, vamos considerar o problema inverso, suponha que conhecemos o valor do débito inicial d_0 e o valor das prestações fixas e queremos determinar a taxa de juros embutida no financiamento. Para isto temos que resolver a equação (4):

$$p = \frac{j}{1 + j - (1 + j)^{-(n-1)}} q$$

para j . Observe que esta não é uma equação simples de se resolver para n maior que 3. Precisamos usar um método iterativo para resolver esta equação. Vamos usar novamente o método de Newton. Um método iterativo começa com uma aproximação inicial da solução, x_0 , e gera uma nova aproximação a partir da anterior, repetidamente, até que se atinja a precisão desejada. No caso do método de Newton, se x_{k-1} é a aproximação anterior, a nova aproximação da solução de $F(x) = 0$ é a solução de uma aproximação linear da equação, nas proximidades da aproximação anterior da solução, ou seja, a solução de

$$F'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + F(x_{k-1}) = 0,$$

onde F' é a derivada de F . Assim, a aproximação x_k é dada por

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})}.$$

Neste caso específico

$$F(x) = \frac{1 - (1 + x)^{-(n-1)}}{x} p + p - q.$$

e a derivada de $F(x)$

$$F'(x) = p \left(\frac{(n-1)(1+x)^{-n}}{x} - \frac{1 - (1+x)^{-(n-1)}}{x^2} \right).$$

Escrevemos um programa que roda em página da web, que usa este método para determinar a taxa de juros. [Clique aqui](#) para experimentar o programa.

Exercício 17. Verifique que realmente a taxa de juros do exemplo anterior é 4,85 % .

5 Sistema de Financiamento com Amortizações Constantes

Este sistema de financiamento é conhecido como SAC. Neste sistema o débito é dividido em parcelas iguais que serão as amortizações correspondentes a cada parcela.

5.1 Tabela de Amortização

Assim como no sistema francês, cada prestação é composta de uma parcela de juro e uma parcela de amortização, ou seja, para $k = 1, \dots, n$, temos

$$p_k = a_k + j_k.$$

Agora, neste caso, a amortização em cada período é dada por

$$a_k = \frac{d_0}{n}.$$

A parcela de juro é, assim como no sistema francês, calculada sobre o saldo devedor no período anterior, ou seja,

$$j_k = j \cdot d_{k-1}.$$

O saldo devedor imediatamente após ter sido paga a parcela p_k é dado por

$$d_k = d_{k-1} - a_k.$$

Exercício 18. Prove a seguinte fórmula para o saldo devedor d_k :

$$d_k = (1 + j)d_{k-1} - p_k$$

Exercício 19. Escreva a solução do exemplo do Exercício 10, mas agora no sistema SAC: Uma bicicleta é vendida numa loja com duas opções de pagamento: à vista por R\$ 129,00 ou em 0+4 pagamentos com juros de 4,85 % de juros ao mês, no sistema SAC. Observe que as prestações são decrescentes. [Clique aqui](#) para usar o programa que calcula a tabela de amortização.

6 Páginas Interativas

Escrevemos alguns programas que rodam em páginas da web para alguns cálculos financeiros:

- **Tabelas de Atualizações Monetárias** - para calcular os valores futuros e o valor atual de uma quantia.
- **Tabelas de Atualizações para Períodos não Inteiros** - para calcular os valores futuros de uma quantia em frações de um período, no qual é conhecida a taxa de juros.
- **Tabela de Série de Pagamentos Iguais** - se você fornece o valor do depósito por período, o programa diz qual o saldo após n períodos e reciprocamente, se você fornece o saldo após n períodos, ele diz quanto deverá ser o valor do depósito por período para que em n períodos se alcance aquele saldo.
- **Tabela de Saldos após Retiradas Iguais** - fornece o valor da retirada mensal e o saldo após cada retirada para que após n períodos o saldo seja igual a zero.
- **Tabelas de Financiamentos** - para calcular as tabelas de financiamento do sistema de amortizações constantes (SAC) e do sistema francês (Tabela Price).
- **Cálculo da Taxa de Juros pelo Método de Newton** - para calcular a taxa de juros praticada na tabela Price, sendo conhecidos o valor do débito e das prestações (fixas).

7 Respostas dos Exercícios

1.

$$0,98 \cdot q_1 = \frac{q_1}{2} + (1+j)^{-1} \frac{q_1}{2}$$

$$0,98 = \frac{1}{2} + \frac{(1+j)^{-1}}{2}$$

$$(1+j)^{-1} = 2 \cdot 0,98 - 1 = 0,96$$

$$j = \frac{1}{0,96} - 1 \approx 0,04167$$

2.

$$2q_0 = (1+j)^n q_0$$

$$2 = (1+j)^n$$

$$\ln 2 = n \ln(1+j)$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+j)} = \frac{\ln 2}{\ln 1,01} \approx 70 \text{ meses}$$

Referências

- [1] Augusto Cesar Morgado, Eduardo Wagner, and Sheila C. Zani. *Progressões e Matemática Financeira*. SBM, Rio de Janeiro, 4a. edition, 2001.