FRAÇÃO
O QUE É PRECISO SABER

Uma fração é um elemento do conjunto dos números racionais (símbolo Q) sua representação é $\frac{a}{b}$ onde:

a € z (...- 3, -2, -1, 0, 1, 2...)
b € z* (...- 3, -2, -1, 1, 2, 3)

Exemplos de frações:

$$\frac{3}{1}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{0}{3}$$

Obs.$_1$: $\frac{3}{0}$ não representa uma fração quando isto ocorrer, proceda-se assim:

$$\frac{3}{0} = \text{Impossível} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3}{0} = + \quad \text{(infinito)}$$

Sabe porquê? $\frac{3}{0} = +$

Vamos substituir o zero (0) por um número que aproxima de zero, por exemplo 0,000001.

$$\frac{3}{0{,}0000001} = 30000000$$

Cada vez que colocarmos maior quantidade de zero após a vírgula maior será o quociente.

Obs.$_2$: $\frac{0}{0}$ não representa uma fração; quando isto ocorrer proceda-se assim:

$$\frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

Sabe porquê?

$$0 \,\underline{|\,0\,}\quad \text{pois } 2 \,.\, 0 = 0$$
$$\;\;\;2$$

$$0 \,\underline{|\,0\,}\quad \text{pois } 3 \,.\, 0 = 0$$
$$\;\;\;3$$

Conclusão: Existem infinitos números inteiros que multiplicados por zero tenha como resultado o zero.

- Para efetuarmos operações com frações é mais cômodo deixar os números que representam a fração (numerador e denominador) primos entre si isto é, simplifique-os até torná-los irredutível.

Ex.: $\frac{34}{51}$

Neste exemplo escolha aleatoriamente um dos números (numerador ou denominador) e comece a dividir por um de seus divisores até encontrar um número próximo, este número primo geralmente é um divisor comum ao numerador e ao denominador.

Ex.$_1$: $\frac{34}{51}$ Vamos escolher por exemplo o (34) $\begin{array}{r|l} 34 & 2 \\ \hline & 17 \end{array} \longrightarrow$ Primo

Então só nos falta averiguar se 51 é múltiplo de 17 também.

$$\begin{array}{r|l} 51 & 17 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Então: $\frac{34 : 17}{51 : 17} = \frac{2}{3}$

Outros exemplos:

Ex.$_2$: $\frac{68}{39}$ Dividindo 39 por um de seus divisores $\begin{array}{r|l} 39 & 3 \\ \hline 0 & 13 \end{array} \longrightarrow$ Primo

$$\frac{68}{39} \begin{array}{l} : 13 \\ : 13 \end{array} = \frac{4}{3}$$

PROPRIEDADES

Propriedade 1: Quando existe apenas uma fração em cada membro é permitido multiplicarmos os meios pelos extremos.

1º Membro 2º Membro

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Ex. 1) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \longrightarrow 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$

Ex. 2) $\frac{3}{2} \quad \frac{6}{7} \longrightarrow 3 \cdot 7 \quad 2 \cdot 6$

Ex. 3) $\frac{x + 2}{2x - 3} = \frac{5}{3} \longrightarrow$

$$3x + 6 = 10x - 15$$
$$6 + 15 = 10x - 3x$$
$$21 = 7x$$
$$\frac{21}{7} = x$$
$$x = 3$$

Quando tivermos mais de uma fração em um dos membros então temos que tirar o (m.m.c).

$$\frac{x}{2} + \frac{x - 3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{4(x) + 2(x - 3)}{\cancel{8}} = \frac{3(1)}{\cancel{8}}$$

$$4x + 2x – 6 = 3$$

$$6x = 3 + 6$$

$$x = \frac{9}{6}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

PROPRIEDADE DA ADIÇÃO

Ex. 1) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5}$ (m.m.c. 15)

$$\frac{2(5) + 3(3)}{15} = \frac{10 + 9}{15} = \frac{19}{15}$$

ou

Macete $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10 + 9}{3 \cdot 5} = \frac{19}{15}$

Ex. 2) $\frac{3}{8} + \frac{2}{4} = \frac{3(4) + 8(2)}{8 \cdot 4} =$

$$\frac{12 + 16}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$$

Ex. 3) $\frac{3}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3(2) + 1(1)}{1 \cdot 2} = \frac{6 + 1}{2} = \frac{7}{2}$

Obs. $_1$: O método acima somente será válido para soma entre duas frações.

Obs. $_2$: Soma de três ou mais frações somente tirando o m.m.c.

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3(6) + 10(2) + 5(5)}{30} = \frac{18 + 20 + 25}{30} = \frac{63}{30} = \frac{21}{10}$$

Exercício 1) Um tanque contém $\frac{2}{3}$ de gasolina se abastecemos mais $\frac{1}{4}$ da capacidade do tanque obtemos?
Obs.: A preposição "de" significa sinal multiplicação.

$$\frac{2}{3} \cdot T + \frac{1}{4} \cdot T = \frac{8T + 3T}{12} = \frac{11}{12} T$$

Exercício 2) Um andarilho percorreu um terço de seu percurso e em seguida mais um oitavo de seu percurso. Se tivesse andado mais 10 metros teria percorrido $\frac{17}{24}$ de seu percurso. Qual o percurso?

SOLUÇÃO:

$$\frac{1}{3} \overset{(de)}{\cdot} x + \frac{1}{8} \overset{(de)}{\cdot} x + 10 \overset{verbo}{=} \frac{17}{24} \cdot x$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{8} + 10 = \frac{17}{24} x$$

$$\frac{8x + 3x + 240}{24} = \frac{17x}{24}$$

$8x + 3x + 240 = 17x$

$240 = 17x - 8x - 3x$

$240 = 6x$

$\frac{240}{6} = x$

x = 40 m

PROPRIEDADE DA SUBTRAÇÃO

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \quad \text{(m.m.c. 15)}$$

$$\frac{2(5) - 3(3)}{15} = \frac{10 - 9}{15} = \frac{1}{15}$$

Dica: Para subtrair duas frações faça assim:

Ex. 1) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2(5) - 3(3)}{3 \cdot 5} = \frac{10 - 9}{15} = \frac{1}{15}$

Ex.2) $\frac{3}{1} - \frac{1}{2} = \frac{6 - 1}{1 \cdot 2} = \frac{5}{2}$

Obs.: Na operação de três ou mais frações tirar o m.m.c.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$ (m.m.c.)

$\frac{3(5) - 1(10) - 3(4)}{20} = \frac{15 - 10 - 12}{20} = \frac{-7}{20}$

Exercício 3) O tanque de combustível de um carro contém meio tanque de gasolina. Foram consumidos $\frac{1}{3}$ do tanque em um percurso e em seguida foram consumidos mais 10 litros restando $\frac{1}{36}$ de combustível no tanque. Qual a capacidade do tanque?

$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - 10 = \frac{1x}{36} \longrightarrow \frac{18x - 12x - 360}{\cancel{36}} = \frac{x}{\cancel{36}} \longrightarrow 6x - x = 360 \longrightarrow 5x = 360 \longrightarrow x = 72$

PRORPRIEDADE DA MULTIPLICAÇÃO

Ex.1) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

Ex.2) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{8}{45}$

Obs. $_1$: A preposição "de" significa sinal de multiplicação.

Obs. $_2$: O verbo significa sinal de igualdade.

Ex.3) Quanto é a metade dos $\frac{2}{3}$ de 60

SOLUÇÃO:

$x \overset{é}{=} \frac{1}{2} \overset{de}{\cdot} \frac{2}{3} \cdot 60 \longrightarrow x = \frac{1 \cdot 2 \cdot 60}{2 \cdot 3} \longrightarrow x = 20$

Exercício 4) Se estivessem na sala de aula 5 alunos a mais, a metade deles seria 20 alunos. Quantos alunos tem a sala de aula?

- $x + 5$

$$\frac{1}{2} \cdot (x + 5) \overset{\text{seria}}{=} 20$$

$$\frac{x + 5}{2} = 20$$

$$x + 5 = 40$$

$$x = 40 - 5$$

$$x = 35$$

PRORPIEDADE DA DIVISÃO

Para dividir frações, basta conservar a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração.

Ex. 1) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10 : 2}{12 : 2} = \frac{5}{6}$$

Localizar o traço de divisão é muito importante.

Ex. 2) $\dfrac{3}{\frac{4}{5}} \longrightarrow 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$

Ex. 3) $\dfrac{\frac{3}{4}}{5}$ $\qquad \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

Obs.: Quem determina qual será a primeira e a Segunda fração é o **maior traço de divisão**.

Então: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$ (Não tem significado)

FRAÇÕES COMPLEMENTARES

Seja a, b e z onde b 0 e a < b então a fração complementar de $\frac{a}{b}$ será $\frac{b - a}{b}$

Ex.1) $\frac{2}{5}$ complemento $\frac{3}{5}$

Ex.2) $\frac{11}{12}$ complemento $\frac{1}{12}$

Exercício 5) Um comerciante pagou uma dívida e ainda ficou devendo R$ 1200,00. Então a divida do negociante era de:

Pagou: $\frac{2}{5}$ da divida

Restam: $\frac{3}{5}$ da divida

O restante corresponde a 1200

$\frac{3}{5} \cdot D = 1200$

$3D = 5 \cdot (1200)$

$3D = 6000$

$D = 2000$

Exercício 6) Uma lanchonete vende hambúrguer a P reais cada um sabendo-se que $\frac{1}{5}$ desse preço é o custo do pão e das demais ingredientes e que $\frac{1}{3}$ corresponde as outras despesas, calcule o lucro obtido na venda de cada hambúrguer.

$$C = \frac{1}{5}P + \frac{1}{3}P \qquad C = \frac{8}{15}P$$

A fração complementar é o lucro.

$$L = \frac{7}{15}P$$

Exercício 7) De um copo cheio de vinho, bebeu-se a terça – parte, após o que se adicionou igual quantidade de água. Bebeu-se mais uma vez um terço e foi novamente adicionada igual quantidade de água. Quanto vinho e quanta água existe agora no copo?

SOLUÇÃO: Quantidade inicial de vinho : V

Bebeu-se: $\frac{V}{3}$ Restou: $\frac{2}{3}V$

Acrescentando $\frac{1}{3}$ água obtemos: $\frac{2}{3}V + \frac{1}{3}$ água.

Bebeu-se: $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}V + \frac{1}{3}\text{ água}\right)$

Restou: $\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}V + \frac{1}{3}\text{ água}\right]$

Acrescentamos $\frac{1}{3}$ água obtemos: $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}V + \frac{1}{3}\text{ água}\right) + \frac{1}{3}$ água

Resultado: $\frac{4}{9}V + \frac{2}{9}$ água $+ \frac{1}{3}$ água

Resultado: $\frac{4}{9}V + \frac{5}{9}$ água

Relação: $\frac{\text{vinho}}{\text{água}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} \longrightarrow \frac{\text{vinho}}{\text{água}} = \frac{4}{5}$

Exercício 8) De um copo cheio de vinho, bebeu-se a metade, após o que se adicionou igual quantidade de água. Desta mistura bebeu-se novamente um terço, sendo outra vez adicionada água até encher. Finalmente, bebeu-se mais um sexto, que foi em seguida substituindo por água, ficando o copo cheio. Quanto vinho e quanta água existe agora no copo?

SOLUÇÃO:

Quantidade inicial de vinho: V

Bebeu-se: $\frac{V}{2}$ Restou: $\frac{V}{2}$

Completando com $\frac{1}{2}$ água obtemos: $\frac{V}{2} + \frac{água}{2}$

Bebeu-se: $\frac{1}{3}\left[\frac{V}{2} + \frac{água}{2}\right]$

Restou: $\frac{2}{3}\left[\frac{V}{2} + \frac{água}{2}\right]$

Completando com $\frac{1}{3}$ água: $\frac{2}{3}\left[\frac{V}{2} + \frac{água}{2}\right] + \frac{água}{3}$

Obtemos: $\frac{V}{3} + \frac{água}{3} + \frac{água}{3}$

Obtemos: $\frac{V}{3} + \frac{2}{3}$ água

Bebeu-se: $\frac{1}{6}\left[\frac{V}{3} + \frac{2}{3}\text{ água}\right]$

Restou: $\frac{5}{6}\left[\frac{V}{3} + \frac{2}{3}\text{ água}\right]$

Completando $\frac{1}{6}$ água obtemos: $\frac{5}{6}\left[\frac{V}{3} + \frac{2}{3}\text{ água}\right] + \frac{1}{6}$ água

Obtemos: $\frac{5}{18}$ V + $\frac{10}{18}$ água + $\frac{1}{6}$ água

Obtemos: $\frac{5}{18}$ V + $\frac{13}{18}$ água

Relação: $\frac{vinho}{água} = \frac{\frac{5}{\cancel{18}}}{\frac{13}{\cancel{18}}} \longrightarrow \frac{vinho}{água} = \frac{5}{13}$

TRANSFORMAÇÃO DE UM DECIMAL EXATO EM FRAÇÃO

Ex.1) $0{,}03 = \frac{3}{100}$

Ex.2) $2{,}514 = \frac{2514}{1000}$

Obs.1) Toda fração que possui o denominador do tipo ($5 \;.\; 2^n$) quando decomposto em fatores primos obtemos sempre um quociente decimal exato.

Ex.1) $\frac{3}{50} = 0{,}06$ Decimal exato pois $50 = 2^1 \;.\; 5^2$

Ex.2) $\frac{4}{125} = 0{,}032$ Decimal exato pois $125 = 2^0 \;.\; 5^3$

Ex.3) $\frac{3}{625} = 0{,}0048$ pois $625 = 2^0 \;.\; 5^4$

Ex.4) $\frac{7}{16} = 0{,}4375$ pois $16 = 2^4 \;.\; 5^0$

Obs.2) Todo decimal representado por uma potência de **5** terá uma representação em potência de **2**.

Ex.1) $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

Ex.2) $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

Ex.3) $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

Ex.4) $0{,}0625 = \frac{625}{10000} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$

DÍZIMA PERIÓDICA

Obs.: A parte decimal da dízima tem que estar acompanhado de reticência

Ex.) 1,333... é uma dízima
1,333 não é uma dízima e sim um decimal exato.

$1{,}333 = \frac{1333}{100}$

COMO TRANSFORMAR UMA DÍZIMA PERIÓDICA EM FRAÇÃO

Ex.1) $0{,}444... = \frac{04 - 0}{9} = \frac{4}{9}$

Ex.2) $0{,}3232... = \frac{032 - 0}{99} = \frac{32}{99}$

Ex.3) $2{,}455... = \frac{245 - 24}{90} = \frac{221}{90}$

Ex.4) $0{,}3777... = \frac{037 - 03}{90} = \frac{34}{90}$

Modelo: A, B C D E F D E F D E F ...

Modelo: A, B C D E F D E F ... = $\frac{A\,B\,C\,D\,E\,F - ABC}{9\,9\,9\,0\,0}$

$$\begin{array}{ccccc} 9 & 9 & 9 & 0 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & E & F & B & C \end{array}$$

- Localizar a parte periódica
- Unir a parte que (não repete) com a parte periódica
- Subtrair da parte que (não repete)
- Cada algarismo que repete na dízima corresponde a nove (9)
- Os algarismos após a virgula que (não repete) corresponde a zero (0)

Ex.: $3{,}427373... = \frac{34273 - 342}{9900} = \frac{33931}{9900}$

Obs.: Toda dízima onde o algarismo nove (9) que é a parte repetidora transformará sempre em um decimal exato.

Ex.1) $0{,}6999... = \frac{069 - 06}{90} = \frac{63}{90} = 0{,}7$

Ex.2) $0{,}999... = \frac{09 - 0}{9} = \frac{9}{9} = 1$

Ex.3) $0{,}35999... = \frac{0359 - 035}{900} = \frac{324}{900} = 0{,}36$

TODA FRAÇÃO PODERÁ SER CONVERTIDA EM PORCENTAGEM

Obs.: 1(inteiro) $\xrightarrow{\text{corresponde}}$ (100%)

Ex.1) $\frac{2}{5}$ é o mesmo que $\frac{2}{5} \cdot 1$ Substituindo 1 por 100%

$\frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%$

Ex.2) $\frac{3}{4} \longrightarrow \frac{3}{4} \cdot 1 \longrightarrow \frac{3}{4} \cdot 100\% \longrightarrow 75\%$

Ex.3) $\frac{3}{10} \longrightarrow \frac{3}{10} \cdot 1 \longrightarrow \frac{3}{10} \cdot 100\% \longrightarrow 30\%$

TODA REPRESENTAÇÃO PERCENTUAL PODERÁ SER TRANSFORMADA EM FRAÇÃO

Ex.1) $20\% \longrightarrow \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

Ex.2) $25\% \longrightarrow \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

Ex.3) $75\% \longrightarrow \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Quanto é a metade de 20% de 70.

$x \overset{\text{é}}{=} \frac{1}{2} \overset{\text{(DE)}}{\cdot} 20\% \overset{\text{DE}}{\cdot} 70$

$x = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{2\cancel{0}}{1\cancel{00}} \cdot 7\cancel{0} \longrightarrow x = 7$

PROPRIEDADE DA POTENCIAÇÃO

Se o numerador e o denominador são fatoráveis e possuem o mesmo expoente então coloque-os em evidência.

Ex.1) $\frac{4}{9} \longrightarrow \frac{2^2}{3^2} \longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Ex.2) $\frac{27}{8} \longrightarrow \frac{3^3}{2^3} \longrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3$

Ex.3) $\frac{a^5}{b^5} \longrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^5$

Ex.4) $\frac{1}{5^3} \longrightarrow \frac{1^3}{5^3} \longrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^3$

Importantíssimo: Uma variável isolada elevada a expoente fracionário passa invertida para o segundo membro tornando-se expoente deste. Veja:

Ex.1) $x^{\frac{1}{2}} = 3$

$x = 3^{\frac{2}{1}}$

$x = 3^2$

Ex.2) $x^{\frac{1}{3}} = 2$

$x = 2^{\frac{3}{1}}$

$x = 2^3$

Ex.3) $x^{\frac{2}{3}} = 4$

$x = 4^{\frac{3}{2}}$

$x = (2^2)^{\frac{3}{2}}$

$x = 2^{\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}}$

$x = 2^{\frac{6}{2}}$

$x = 2^3$

<u>PROBLEMAS QUE ENVOLVEM (MÍNINO MULTIPLO COMUM)</u>

Exercício 9) Três cidades brasileiras, A, B, e C realizaram grandes festas: de 5 em 5 meses em A, de 8 em 8 meses em B, e de 12 em 12 meses em C. Essas festas coincidiram em setembro de 1982. Coincidirão novamente em?

SOLUÇÃO:

Eventos que ocorrem periodicamente o (m.m.c) indica a simultaneidade do evento.

5, 8, 12	4
5, 2, 3	2
5, 1, 3	3
5, 1, 1	5
1, 1, 1	4 . 2 . 3 . 5 = 120 dias

Logo em janeiro de 1983 haverá a próxima festa simultânea em A, B, e C.

PROBLEMAS QUE ENVOLVEM MÁXIMO DISIVOR COMUN

Exercício 10) Uma editora recebeu os seguintes pedidos, de três livrarias:

LIVRARIA	NÚMERO DE EXEMPLARES
A	1300
B	1950
C	3900

A editora deseja remeter os três pedidos em “n” pacotes iguais, de tal forma que n seja o menor possível.

SOLUÇÃO:

Cada pacote deverá conter uma quantidade de livros que seja um divisor comum as três quantidades de livro. Mas dentre os divisores o maior deles resultará em menos quantidades de pacotes.

$$\begin{array}{c|l} 1300,\ 1950,\ 3900 & 10 \quad MDC = 10.13.5 \\ 130,\ 195,\ 390 & 13 \quad MDC = 650 \\ 10,\ 15,\ 30 & 5 \\ 2,\ 3,\ 6 & \end{array}$$

$$\frac{1300}{650} = 2 \qquad \frac{1950}{650} = 2 \qquad \frac{3900}{650} = 6$$

n = 11 pacotes

Importantíssimo: Para calcular o MDC basta decompor os números simultaneamente. **Interrompa a decomposição** quando não houver mais divisor comum a todos os termos.
O MDC será o produto dos números obtidos.

PROPRIEDADE DE IDENTIDADE

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Se somarmos uma unidade a cada membro a identidade se mantém.

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Quando aplicar??

Quando é dada uma razão, sendo conhecendo a soma de seus termos.

Ex.1) $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \\ a + b = 10 \end{cases}$

SOLUÇÃO:

$\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$

$\frac{a+b}{b} = \frac{1+4}{4}$

$\frac{10}{b} = \frac{5}{4}$

$5b = 40$

$b = 8$

Substituindo $b = 8$ em $a + b = 10$

$a + 8 = 10$

$a = 2$

PROBLEMA QUE ENVOLVEM FRAÇÕES

$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & Q \end{array} \longrightarrow$ **$D = dq + R$**

- Se eu der a cada um de vocês 9 moedas, um não receberá nada. Se der 8 moedas a cada um, vai sobrar uma. Quantas moedas foram destruídas? Quantas pessoas havia?

SOLUÇÃO:

N = n.º de moedas   P = n.º de pessoas   Q = moedas por pessoa

$\begin{array}{l|l} N & P - 1 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$ $\begin{array}{l|l} N - 1 & P \\ \hline 0 & 8 \end{array}$

Observar que a quantidade que sempre sobra nós eliminamos pois assim obtemos divisão exata.

I $\{N = 9(P - 1)$ II $\begin{cases} N - 1 = 8P \\ N = 8P + 1 \end{cases}$

Igualando I e II

$N = N$

$9(P - 1) = 8P + 1$

$9P - 9 = 8P + 1$

$P = 10$

Substituindo $P = 10$ em

$N = 8P + 1$

$N = 8(10) + 1$

$N = 81$

Exercício 11) O IBGE contratou um certo número de entrevistadores para realizar o recenseamento em uma cidade. Se cada um deles recenseasse 100 residências 60 delas não seriam visitadas. Como, no entanto, todas as residências foram visitadas e cada recenseados visitou 102 casas, quantas residências tem na cidade?

SOLUÇÃO:

N = n.º de residências P = n.º de recenseadores

Q = n.º de residências por recenseador

I) $\begin{array}{r|l} N - 60 & P \\ \cline{2-2} & 100 \end{array}$ II) $\begin{array}{r|l} N & P \\ \cline{2-2} & 102 \end{array}$

I) $\begin{cases} N - 60 = 100\,P \\ N = 100\,P + 60 \end{cases}$ II) $N = 102\,P$

Igualando I e II

$N = N$

$102\,P = 100\,P + 60$

$2\,P = 60$

$P = 30$

Substituindo $P = 30$ em $N = 102\,P$

$N = 102\,(30)$

$N = 3060$

Exercício 12) A s despesas de um condomínio totalizam R$ 3600,00. Cinco dos condôminos, não dispondo de dinheiro para pagar, abrigam os demais condôminos, além de sua parte, a pagar um adicional de R$ 240,00 cada um. Qual o número total de pessoas do condomínio?

SOLUÇÃO:

T = Total de despesas N = N.º de condôminos Q = Despesas por condômino

$\begin{array}{r|l} 36000 & n \\ \cline{2-2} & Q \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 36000 & n - 5 \\ \cline{2-2} & Q + 240 \end{array}$

I {$NQ = 36000$ II {$3600 = (N - 5)\,(Q + 240)$

Substituindo Q por $\frac{36000}{n}$ em II

$$36000 = (n - 5)\left(\frac{36000}{n} + 240\right)$$

$$\cancel{36000} = \cancel{36000} + 240n - \frac{18000}{n} - 1200$$

$$1200 = 240n - \frac{180000}{n} \quad (\div 120)$$

$$10 = 2n - \frac{1500}{n}$$

$$10\,n = 2n^2 - 1500$$

$$2n^2 - 10n - 1500 \; (\div 2)$$

$$n^2 - 5n - 750 = 0$$

$$n = 30$$

Exercício 13) Um grupo de amigas resolveram fazer um churrasco e para isso vão ao mercado perfazendo um gasto de R$ 2.160,00. Cinco não estão em condições de pagar nada. Aos restantes, caberá então mais R$ 36,00 por cabeça. Quantas pessoas havia neste grupo?

SOLUÇÃO:

T = Total gasto

N = N.º de pessoas

Q = Quantidade gasta por pessoa

$$2160 \; \underline{|\; n \;} \qquad\qquad 2160 \; \underline{|\; n - 5 \;}$$
$$Q \qquad\qquad\qquad Q + 36$$

I {NQ = 2160

II {2160 = (N - 5) (Q + 36)

Substituindo Q por $\frac{2160}{n}$ em II

$$2160 = (n - 5) \left(\frac{2160}{n} + 36\right)$$

$$2160 = 2160 + 36n - \frac{10800}{n} - 180$$

$$180 = 36n - \frac{10800}{n} \; (\div 36)$$

$$5 = n - \frac{300}{n}$$

$$5n = n^2 - 300$$

$$n^2 - 5n - 300 = 0$$

$$n = 20$$

TRABALHO FEITO SIMULTANEAMENTE

Exercício 14) Uma torneira enche um tanque em 4 horas. O ralo do tanque pode esvaziá-lo em 3 horas. Estando o tanque cheio, observamos simultaneamente a torneira e o ralo. Depois de quanto tempo o tanque se encontrará vazio?

SOLUÇÃO:

$$\text{Volume} \;\; \underline{|\;\text{Tempo}\;} \quad \Rightarrow \quad \text{Vazão}$$

Torneira: $V \;\; \underline{|\;4\;}$

$$\frac{V}{4} \text{ litros/hora}$$

Ralo: $V \;\; \underline{|\;3\;}$

$$\frac{V}{3} \text{ litro/hora}$$

$$\left(\frac{V}{3}\text{ l/h} - \frac{V}{4}\text{ l/h}\right) . 1\text{h} = \text{Volume consumido por hora}$$

Então em t horas termos consumido todo o volume.

$$\left(\frac{V}{3}\text{ l/h} - \frac{V}{4}\text{ l/h}\right) . t = V$$

$$\cancel{V} \left(\frac{1}{3h} - \frac{1}{4h}\right) . t = V$$

$$\left(\frac{4-3}{12h}\right) t = 1$$

$$\frac{t}{12h} = 1$$

$$t = 12h$$

Exercício 15) Duas garotas realizaram um serviço de datilografia. A mais experiente consegue fazê-lo em 2 horas, a outra em 3 horas. Se dividirmos esse serviço de modo que as duas juntas possam fazê-lo, no menor tempo possível, esse tempo será de:

SOLUÇÃO:

T: Serviço completo

$$T \;\Big|\; \underline{2} \qquad \frac{T}{2}\ \text{serviço/h}$$

$$T \;\Big|\; \underline{3} \qquad \frac{T}{3}\ \text{serviço/h}$$

$$\left(\frac{T}{2}\ \text{serviço/h} + \frac{T}{3}\ \text{serviço/h}\right) .\ 1h = \text{ serviço feito por hora}$$

Então em t (horas) será feito todo o serviço

$$\left(\frac{T}{2}\ \text{serviço/h} + \frac{T}{3}\ \text{serviço h}\right) .\ t = T\ \text{serviço}$$

$$T\ (\text{serviço}) \left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{3h}\right) .\ t = T\ (\text{serviço})$$

$$\frac{(3+2)}{6h}\ t = 1$$

$$\frac{5t}{6h} = 1$$

$$t = \frac{6}{5}\ h \text{ (substituindo h por 60 minutos)}$$

$$t = \frac{6}{5}\ .\ 60 \text{ minutos}$$

t = 72 minutos ou 1hora e 12 minutos

Exercício 16) Três operários A,B,C, trabalhando juntos, conseguem executar uma dada tarefa em 3 horas. Os operários A e B trabalhando juntos, conseguem realizar esta mesma tarefa em 4 horas. Em quanto tempo, o operário C, trabalhando sozinho, consegue executar a tarefa?

SOLUÇÃO:

P : Serviço completo

$$P \;\big|\underline{\;ta\;}\quad \frac{P}{ta} \qquad\qquad P \;\big|\underline{\;tb\;}\quad \frac{P}{tb} \qquad\qquad P \;\big|\underline{\;tc\;}\quad \frac{P}{tc}$$

$$\text{I}\begin{cases} \dfrac{P}{ta} + \dfrac{P}{tb} & \text{Fração feita em 1 horas} \\[2ex] \left(\dfrac{P}{ta} + \dfrac{P}{tb}\right) - 4 = P \longrightarrow \dfrac{P}{ta} + \dfrac{P}{tb} = \dfrac{P}{4} \end{cases}$$

$$\bullet\;\text{II}\begin{cases} \dfrac{P}{ta} + \dfrac{P}{tb} + \dfrac{P}{tc} & \text{Fração feita em 1 hora} \\[2ex] \left(\dfrac{P}{ta} + \dfrac{P}{tb} + \dfrac{P}{tc}\right) . \;3 = P \end{cases}$$

Substituindo $\dfrac{P}{ta} + \dfrac{P}{tb}$ por $\dfrac{P}{4}$ em II $\left(\dfrac{P}{ta} + \dfrac{P}{tb} + \dfrac{P}{tc}\right) 3 = P$

$$\left(\frac{P}{4} + \frac{P}{tc}\right) . 3 = P$$

$$P\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{tc}\right) . \;3 = P$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{tc} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{tc} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{tc} = \frac{1}{12}$$

tc = 12 horas

Exercício 17) Uma torneira enche uma caixa d'água em 3 horas e uma outra torneira enche a mesma caixa em 6 horas. Um dreno esvazia a caixa em 2 horas.

a) Estando com água pela metade, em quanto tempo a caixa encherá, se abrirmos simultaneamente as duas torneiras e o dreno?

SOLUÇÃO:

V = Caixa cheia de água
Volume tempo A

$$V \;\underline{|\; t_a} \qquad V \;\underline{|\; t_b} \qquad V \;\underline{|\; t_c}$$

$$\frac{V}{ta}\text{ (vazão)} \qquad \frac{V}{tb} \qquad \frac{V}{tc}$$

$$\left(\frac{V}{ta} + \frac{V}{tb} - \frac{V}{tc}\right) . \; t = \frac{V}{2}$$

$$\cancel{V}\left(\frac{1}{ta} + \frac{1}{tb} - \frac{1}{tc}\right) . \; t = \frac{\cancel{V}}{2}$$

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) . \; t = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0}{12} . t = \frac{1}{2}$$

$t = \dfrac{6}{0}$ impossível (nunca esvaziará)

b) Suponha agora que a capacidade da caixa d'água seja de 3 metros cúbicos. Calcule a razão do dreno em litros por segundo.

SOLUÇÃO:

Vazão por dreno

$$\text{Volume} \;\underline{|\; tc} \qquad \frac{V}{tc}\text{ (vazão)}$$

$\text{Vazão} = \dfrac{3m^3}{2 \text{ horas}}$ $\qquad 1m^3 = 1000$ litros $\qquad 1h = 3600$ segundos

$$\text{Vazão} = \frac{3000 \text{ litros}}{7200 \text{ seg.}}$$

$$\text{Vazão} = \frac{5}{12} \text{ l/s}$$

Exercício 18) Um trem expresso, a 80km/h, vai no sentido contrário de um trem misto, que faz 40 km/h. Quanto tempo terminará o encontro dos dois se o expresso tem 200m de comprimento e o misto 300m?

SOLUÇÃO:

$$d \,\big|\, t_a \qquad \frac{d}{t_a} = (v_a) \qquad\qquad d \,\big|\, t_b \qquad \frac{d}{t_b} = (v_b)$$

(va + vb) . t = d

(80km/h + 40km/h) . t = (200m + 300m)

$$120\ \frac{\cancel{km}}{h} \cdot t = 0{,}5\ \cancel{km}$$

$$\frac{120}{h}\ t = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{240}\ h \qquad (1h = 3600 \text{ segundos})$$

$$t = \frac{1}{240} \cdot 3600 \text{ segundos}$$

t = 15 segundos

Exercício 19) Uma companhia de soldados marcha pela estrada. A coluna de 600 metros de comprimento está fazendo 5km/h. Um ciclista vem ao encontro da coluna de soldados e ultrapassa paralelamente a coluna. Quanto tempo leva esse encontro, se o ciclista vai a 15km/h?

SOLUÇÃO:

$$d \,\big|\, t_a \qquad \frac{d}{t_a} = (v_a) \qquad\qquad d \,\big|\, t_b \qquad \frac{d}{t_b} = (v_b)$$

(va + vb) . t = d

(5km/h + 15km/h) . t = 600m

20km/h . t = 0,6 km

$$\frac{20}{h} \cdot t = \frac{3}{5}$$

$$t = \frac{3}{100}\ h \qquad (1h = 3600s)$$

$$t = \frac{3}{100} \cdot 3600\ s$$

t = 108 segundos ou 1 minuto e 48 segundos

Exercício 20) Um trator percorreu a metade de um terreno a 15km/h; na outra metade, porém não conseguiu fazer mais do que 3km/h, devido ao grande peso que puxara. Qual foi a velocidade média do trator, isto é, com que velocidade deveria andar, para fazer o trecho todo com uma velocidade constante e igual?

SOLUÇÃO:

$\frac{d}{2}$ | ta — $\frac{d}{2\ ta} = 15$ km/h

$\frac{d}{2}$ | tb — $\frac{d}{2\ tb} = 3$ km/h

$ta = \frac{d}{30}$ $\qquad tb = \frac{d}{6}$

d | tm — $\frac{d}{tm} = vm$

$$vm = \frac{d}{ta + tb}$$

$$vm = \frac{d}{\frac{d}{30} + \frac{d}{6}}$$

$$vm = \frac{d}{\frac{6d}{30}}$$

vm = 5km/h

Exercício 21) Pedro e Lívia, pretendem se encontrar, moram 15km um do outro, ambos possuem celular e partem simultaneamente ao encontro. De repente Pedro liga para Lívia e lhe diz: “Estou agora na esquina da rua Aurora”. Lívia responde logo: “Ótimo! Vamos nos encontrar em 1 hora”. A que distância estará um do outro?

SOLUÇÃO:

d | ta — $\frac{d}{ta} = va$

d | tb — $\frac{d}{tb} = vb$

(va + vb) . 1 = dab

(5km/h + 4km/h) . 1h = dab

$9\ \frac{km}{h}\ .\ h = dab$

dab = 9 km

Exercício 22) Um indivíduo fez uma viagem de 630km. Teria gasto menos 4 dias se tivesse caminhado mais 10km por dia. Quantos dias gastou na viagem e quantos quilômetros caminhou por dia?

SOLUÇÃO:

$$d \;\big|\; \frac{t}{v} \qquad\qquad d \;\big|\; \frac{t-4}{v+10}$$

$$\text{I} \begin{cases} d = v \,.\, t \\ 630 = v \,.\, t \end{cases} \qquad\qquad \text{II}\ \{d = (t-4)(v+10)$$

Substituindo V por $\frac{63}{t}$ em II

$630 = (t - 4)\left(\frac{630}{t} + 10\right)$

$630 = 630 + 10t - \frac{2520}{t} - 40$

$40 = 10t - \frac{252}{t}$

$10t^2 - 40t - 2520 = 0$

$t^2 - 4t - 252 = 0$

$t = 18$ dias

$630 = v \,.\, 18$

$v = 35$ km/dia

Exercício 23) Dois ciclistas cobrem o mesmo percurso de 96km. O primeiro percorre em média 8km/h mais que o segundo e realiza o percurso em uma hora a menos. Calcular a velocidade média dos dois ciclistas.

SOLUÇÃO:

$$d \;\big|\; \frac{t}{\frac{d}{t} = v} \qquad\qquad d \;\big|\; \frac{t-1}{\frac{d}{t-1} = v + 8}$$

$$\text{I} \begin{cases} v = \frac{d}{t} \end{cases} \qquad\qquad \text{II}\ \{d = (t-1)(v+8)$$

Substituindo v por $\frac{96}{t}$ em II

$96 = (t - 1)\left(\frac{96}{t} + 8\right)$

$96 = 96 + 8t - \frac{96}{t} - 8$

$8 = 8t - \frac{96}{t}$

$8t^2 - 8t - 96 = 0 \ (\div\ 8)$

$t^2 - t - 12 = 0$

$t = 4$ horas

$96 = v \,.\, 4$

$v = 24$ km/h

$v_2 = 24 + 8 = 32$ km/h

Exercício 24) Duas torneiras podem encher um reservatório em 2 horas e 24 minutos. A primeira delas demora 2 horas mais que a segunda, quando ambas funcionam isoladamente. Pergunta-se: quanto tempo leva cada torneira para encher o mesmo tanque?

SOLUÇÃO:

$V \;\underline{|\, ta \quad}$ $\frac{v}{ta}$

$V \;\underline{|\, tb \quad}$ $\frac{v}{tb}$

$$\left(\frac{v}{ta} + \frac{v}{tb}\right) . t = v$$

$$\left(\frac{v}{t+2} + \frac{v}{t}\right)\left(2 + \frac{24}{60}\right) = v$$

$$\cancel{v}\left(\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t}\right)\frac{12}{5} = \cancel{v}$$

$$\frac{t + t + 2}{t\,(t+2)} = \frac{5}{12}$$

$12\,(2t + 2) = 5t\,(t + 2)$

$24t + 24 = 5t^2 + 10t$

$5t^2 - 14t - 24 = 0$

$t = 4h$

$ta = 6h$

$tb = 4h$

Exercício 25) Vinte pessoas em excursão pernoitam num hotel. Os homens despendem para isso R$ 720,00 e as mulheres gastam a mesma importância. Sabendo-se que cada mulher pagou R$ 30,00 menos que cada homem, pergunta-se: quantos eram os homens e as mulheres?

SOLUÇÃO:

D_H = Despesa por homens

H = Quantidade de homens

D_M = Despesas das mulheres

20 - H = Quantidade de mulheres

$D_H \;\underline{|\, H \quad}$ $\frac{D_H}{H}$ (Despesa por cada homem)

$D_M \;\underline{|\, M \quad}$ $\frac{D_M}{M}$ (Despesa por cada mulher)

$720 \;\underline{|\, H \quad}$ x $XH = 720$ $X = \frac{720}{H}$ Substituindo	$720 \;\underline{|\, 20 - H}$ $x - 30$ $720 = (20 - H)\,(x - 30)$ $720 = (20 - H)\left(\frac{720}{H} - 30\right)$

$$\cancel{720} = (20 - H)\,\cancel{30}\left(\frac{24}{H} - 1\right)$$

$$24 = (20 - H)\left(\frac{24}{H} - 1\right)$$

$$24 = \frac{480}{H} - 20 - 24 + H$$

$$68 = \frac{480}{H} + H$$

$H^2 - 68H + 480 = 0$

$H_1 = 60$ $\mathbf{H_2 = 8}$

$M = 20 - H$

$M = 20 - 8 \longrightarrow M = 12$

Exercício 26) Dois ciclistas estão a 30 km um do outro e pedalam a 15km/h para se encontrarem. Desde a partida, uma vespa voa de um para o outro, constantemente de lá para cá, até que os dois ciclistas se encontram. Qual foi a distância percorrida pela vespa, se voava a 20km/h?

SOLUÇÃO:

Ciclista **A**	Ciclista **B**
$v_A = 15km/h$ Distância Percorrida = d_A	$v_B = 15km/h$ $d_B = 30 - da$

da | t

$$\frac{d_A}{t} = v_A$$

d_B | t

$$\frac{d_B}{t} = v_B$$

I) $t = \frac{d_A}{v_A}$

II) $t = \frac{d_B}{v_B}$

Igualando I e II

$$\frac{d_A}{v_A} = \frac{d_B}{v_B}$$

$$\frac{d_A}{15} = \frac{30 - d_A}{15}$$

$2\,d_A = 30$

$d_A = 15km$

$t = \frac{d_A}{v_A}$

$t = \frac{15\ km}{15km/h}$

$t = 1\ h$

A distância que a vespa percorreu

D | t

$$\frac{d}{t} = v$$

D | 1h

20km/h

D = 1h . 20km/h

D = 20km

Exercício 27) Se gastarmos diariamente a mesma quantia, o dinheiro dará uma semana inteira. Mas se gastarmos por dia R$ 50,00 a mais não sobrará nada para Domingo. Qual é a mesma quantia disponível para a semana?

SOLUÇÃO:

D = Total gasto T = Valor por dia

D | 7

$\frac{D}{7} = x$ **D = 7x**

D | 6

$\frac{D}{6} = x + 50$

D = 6 (x + 50)

Substituindo D por 7x

7x = 6 (x +50)
7x = 6x + 300
x = 300

Então disponível para semana será:

D = 7x
D = 7 (300)
D = 2100

Exercício 28) Se o pessoal estiver sentado com mais conforto, cada pessoa ocupará 60cm. Se chegar mais um para sentar, cada um ficará apenas com 50cm. Qual é o comprimento do banco?

SOLUÇÃO:

C = Comprimento do banco N = N.º de pessoas

C | n

$\frac{C}{n}$ = 60 cm (espaço ocupado por cada pessoa) **C = 60n**

Substituindo C = 60n em $\frac{C}{n + 1} = 50$

$\frac{60\,n}{n + 1} = 50$

60n = 50n + 50	c = 60 n
10n = 50	c = 60 . 5
n = 5	c = 300 cm
Substituindo n = 5 em $\frac{C}{n} = 60$	c = 3m