

## AULA 16

### **P.G. – PRODUTO, SOMA E LIMITE DA SOMA DOS TERMOS**

---

#### **Produto dos termos de uma P.G.**

Dada uma P.G.  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ , o produto dos  $n$  primeiros termos desta P.G. é dado por:

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Exemplo:

Calcule o produto dos vinte primeiros termos da P.G.  $(1, 2, 4, 8, \dots)$

Resolução:

P.G.  $(1, 2, 4, 8, \dots)$

$$a_1 = 1 \text{ e } q = 2$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{20} = a_1 \cdot q^{20-1}$$

$$a_{20} = 1 \cdot 2^{19}$$

$$a_{20} = 2^{19}$$

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

$$|P_{20}| = \sqrt{(a_1 \cdot a_{20})^{20}}$$

$$|P_{20}| = \sqrt{(1 \cdot 2^{19})^{20}}$$

$$|P_{20}| = \sqrt{(2^{19})^{20}}$$

$$|P_{20}| = (2^{19})^{10}$$

$$|P_{20}| = 2^{190}$$

Como os termos da P.G. são positivos,  $P_{20} \geq 0$

$$P_{20} = 2^{190}$$

---

#### **Soma dos termos**

Seja uma progressão geométrica de primeiro termo  $a_1$  e razão  $q$ . A soma dos  $n$  primeiros termos desta progressão  $(S_n)$  é calculada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Ou

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

---

Exemplos:

Calcule a soma dos vinte primeiros termos da P.G. ( 1, 2, 4, 8, 16, ... )

Resolução:

$$a_1 = 1$$

$$q = 2$$

$$n = 20$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{20} = \frac{a_1 \cdot (q^{20} - 1)}{q - 1}$$

$$S_{20} = \frac{1 \cdot (2^{20} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{20} = \frac{(2^{10} \cdot 2^{10} - 1)}{1}$$

$$S_{20} = (1024 \cdot 1024 - 1)$$

$$S_{20} = 1.048.576 - 1$$

$$S_{20} = 1.048.575$$

Calcular a soma dos sete primeiros termos da P.G.(1; 3; 9; ... )

Resolução:

$$a_1 = 1$$

$$q = 3$$

$$n = 7$$

---

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_7 = \frac{a_1 \cdot (q^7 - 1)}{q - 1}$$

$$S_7 = \frac{1 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_7 = \frac{2187 - 1}{2}$$

$$S_7 = \frac{2186}{2}$$

$$S_7 = 1093$$

---

### Série geométrica ( $S_n$ )

Série geométrica é uma série gerada por uma progressão geométrica, sendo que, cada termo da série é a soma do termo correspondente na PG com todos os termos anteriores à ele.

Exemplo:

Da PG (1, 2, 4, 8, ...) obtém-se a série geométrica  $S_n$  (1, 3, 7, 15, ...).

Note que:

$$3 = 2 + 1$$

$$7 = 4 + 2 + 1$$

$$15 = 8 + 4 + 2 + 1$$

### **Série geométrica convergente:**

Série geométrica convergente é a série gerada por uma progressão geométrica com razão  $q$ , sendo que,  $-1 < q < 1$ .

### **Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica convergente.**

Sempre que

$$-1 < q < 1$$

e

$$n \rightarrow \infty$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

---

Exemplos:

Calcule o valor de:

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$$

Resolução:

A seqüência é uma P.G. com:

$$\mathbf{a_1 = 4}$$

$$\mathbf{q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{n \rightarrow \infty}$$

Portanto

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

$$S = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 1}$$

$$\mathbf{S = 8}$$

---

Calcule a soma dos infinitos termos da seqüência  
( 0,2; 0,02; 0,002; ...)

Resolução:

A seqüência é uma P.G. com:

$$a_1 = 0,2$$

$$q = \frac{0,02}{0,2} = 0,1$$

$$n \rightarrow \infty$$

Portanto

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{0,2}{1-0,1}$$

$$S = \frac{0,2}{0,9}$$

$$S = \frac{2}{9}$$

Calcule o valor de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}$$

A seqüência é uma P.G. com:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$e n \rightarrow \infty$$

Portanto

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

---

$$S = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$S = 1$$

---

### EXERCÍCIOS:

- 1) A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2 é 511. O valor de n é:  
a) 8   b) 9   c) 10   d) 11   e) 12
- 2) Calcule o produto dos cinco primeiros termos da P.G. (2, 6, 18,...)
- 3) Calcule o valor de:  
 $10 + 5 + \frac{5}{2} + \dots$
- 4) Sabendo-se que a soma dos infinitos termos de uma P.G. é 5x e que o primeiro termo é x, calcule a razão.

---

### Resolução:

- 1) A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2 é 511. O valor de n é:  
a) 8   b) 9   c) 10   d) 11   e) 12

### Resolução:

$$a_1 = 1, q = 2 \text{ e } S_n = 511$$

$$S_n = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$511 = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$511 = \frac{2^n - 1}{1}$$

$$511 = 2^n - 1$$

$$2^n - 1 = 511$$

$$2^n = 511 + 1$$

$$2^n = 512$$

$$2^n = 2^9 \quad \swarrow \quad n = 9$$

Resposta **b**

2) Calcule o produto dos cinco primeiros termos da P.G. (2, 6, 18,...)

Resolução:

P.G.(2, 6, 18, ...)

$$a_1 = 2$$

$$q = 3$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$$

$$a_5 = 2 \cdot 3^4$$

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

$$|P_5| = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5}$$

$$|P_5| = \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 3^4)^5}$$

$$|P_5| = \sqrt{(2^2 \cdot 3^4)^5}$$

$$|P_5| = \sqrt{2^{10} \cdot 3^{20}}$$

$$|P_5| = 2^5 \cdot 3^{10}$$

Como os termos da P.G. são positivos,  $P_5 > 0$  e portanto

$$P_5 = 2^5 \cdot 3^{10}$$

3) Calcule o valor de:

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + \dots$$

Resolução:

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + \dots$$

é uma P.G. com:

$$a_1 = 10, q = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ e } n \rightarrow \infty$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

4) Sabendo-se que a soma dos infinitos termos de uma P.G. é  $5x$  e que o primeiro termo é  $x$ , calcule a razão.

$$S = 5x \text{ e } a_1 = x$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$5x = \frac{x}{1-q}$$

$$5x(1-q) = x$$

$$1-q = \frac{x}{5x}$$

$$1 - q = \frac{1}{5}$$

$$-q = -1 + \frac{1}{5} \quad \cdot(-1)$$

$$q = 1 - \frac{1}{5}$$

$$q = \frac{5-1}{5}$$

$$q = \frac{4}{5}$$

$$\text{Resposta } q = \frac{4}{5}$$