
AULA 15

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Progressão geométrica é uma seqüência na qual cada termo é o anterior multiplicado pela razão.

Exemplo:

A seqüência (1; 2; 4; 8; 16; 32; ...) é uma progressão geométrica com primeiro termo 1 e razão 2.

Note que $2 = 1.2$; $4 = 2.2$; $8 = 4.2$;...

A razão da P.G. é representada pela letra **q** e é calculada dividindo-se um termo pelo anterior

$$q = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \dots = 2$$

Termo geral

P.G. (a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; ...; a_n ; ...)

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \cdot q = a_1 \cdot q^4$$

·
·
·

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Exemplos:

Calcular o décimo termo da seqüência

(1; 2; 4; 8; ...)

Resolução:

P.G.(1; 2; 4; 8; ...)

$$q = \frac{2}{1} = 2$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$

$$a_{10} = 1 \cdot 2^9$$

$$a_{10} = 512$$

Calcule o primeiro termo da P.G. em que a razão é 3 e o quinto termo é 162

Resolução:

$$a_5 = 162$$

$$q = 3$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$162 = a_1 \cdot 3^4$$

$$162 = a_1 \cdot 81$$

$$\frac{162}{81} = a_1$$

$$a_1 = 2$$

Sejam a_n e a_m dois termos quaisquer de uma P.G. temos:

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

Exemplo:

Calcule a razão de uma P.G. em que o quinto termo é 512 e o décimo termo é 16384.

Resolução:

$$a_5 = 512 \text{ e } a_{10} = 16384$$

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

$$a_{10} = a_5 \cdot q^{10-5}$$

$$16384 = 512 \cdot q^5$$

$$\frac{16384}{512} = q^5$$

$$q^5 = 32$$

$$q = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5}$$

$$q = 2$$

Termo médio:

Em toda P.G., cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo anterior e o posterior.

Exemplos:

1) P.G. (1; 3; 9; ...)

$$3^2 = 1 \cdot 9$$

2) P.G. (4; 8; 16; ...)

$$8^2 = 4 \cdot 16$$

3) Calcule o quarto termo da P.G.

($x - 6$; $x - 4$; x ; ...)

Resolução:

P.G. ($x - 6$; $x - 4$; x ; ...)

$$(x - 4)^2 = (x - 6) \cdot x$$

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 6x$$

$$-8x + 16 = -6x$$

$$16 = -6x + 8x$$

$$16 = 2x$$

$$8 = x$$

$$\mathbf{x = 8}$$

P.G. ($x - 6$; $x - 4$; x ; ...)

$$x = 8$$

P.G. ($8 - 6$; $8 - 4$; 8 ; ...)

P.G. (2 ; 4 ; 8 ; ...)

$$a_4 = 16$$

EXERCÍCIOS:

1) (F.BELAS ARTES) Numa progressão geométrica(PG), o primeiro termo é a^3 , o último é a^{19} e a razão é a^2 . O número de termos desta PG é:

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

2) (MAUÁ) – Determine x para que 4 , x e 9 formem, nesta ordem, uma progressão geométrica.

3) Que número deve ser somado aos números 0 , 4 e 16 , para que, nesta ordem, formem uma progressão geométrica?

4) O décimo sétimo termo da progressão geométrica em que o quinto termo é 128 e a razão é 4 é:

a) 4^{10} b) 2^{31} c) 2^{24} d) 4^{20} e) 2^{25}

5) Calcule o vigésimo termo de uma P.G. em que o primeiro termo é a^2 e a razão é a^3 .

RESOLUÇÃO:

1) (F.BELAS ARTES) Numa progressão geométrica(PG), o primeiro termo é a^3 , o último é a^{19} e a razão é a^2 . O número de termos desta PG é:

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13

Resolução:

$$a_1 = a^3, \quad a_n = a^{19} \quad \text{e} \quad q = a^2$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a^{19} = a^3 \cdot (a^2)^{n-1}$$

$$a^{19} = a^3 \cdot a^{2(n-1)}$$

$$a^{19} = a^3 \cdot a^{2n-2}$$

$$a^{19} = a^{3+2n-2}$$

$$a^{19} = a^{2n+1} \quad \text{—} \quad 19 = 2n + 1$$

$$19 - 1 = 2n$$

$$18 = 2n$$

$$n = 9$$

Resposta **a**

2) (MAUÁ) – Determine x para que 4, x e 9 formem, nesta ordem, uma progressão geométrica.

Resolução:

P.G.(4, x, 9)

$$x^2 = 4 \cdot 9$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm \sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

Resposta: $x = 6$ ou $x = -6$

3) Que número deve ser somado aos números 0, 4 e 16, para que, nesta ordem, formem uma progressão geométrica?

Resolução:

P.G.(0 + x, 4 + x, 16 + x)

$$(4 + x)^2 = (0 + x) \cdot (16 + x)$$

$$16 + 8x + x^2 = 16x + x^2$$

$$16 + 8x + x^2 - 16x - x^2 = 0$$

$$16 - 8x = 0$$

$$-8x = -16 \quad \cdot (-1)$$

$$8x = 16$$

$$x = \frac{16}{8}$$

$$\mathbf{x = 2}$$

4) O décimo sétimo termo da progressão geométrica em que o quinto termo é 128 e a razão é 4 é:

a) 4^{10} b) 2^{31} c) 2^{24} d) 4^{20} e) 2^{25}

Resolução:

$$a_5 = 128 \text{ e } q = 4$$

$$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$$

$$a_5 \cdot q^{17-5}$$

$$a_{17} = 128 \cdot 4^{12}$$

$$128 \cdot 4^{12}$$

$$2^7 \cdot (2^2)^{12}$$

$$a_{17} = 2^7 \cdot 2^{2 \cdot 12}$$

$$a_{17} =$$

$$a_{17} = a_5 \cdot q^{12}$$

$$a_{17} =$$

$$a_{17} =$$

$$a_{17} =$$

$$2^7 \cdot 2^{24}$$

$$a_{17} = 2^{7+24}$$

$$a_{17} =$$

2^{31} Resposta **b**

5) Calcule o vigésimo termo da P.G. em que o primeiro termo é a^2 e a razão é a^3 .

Resolução:

$$a_1 = a^2 \text{ e } q = a^3$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q^{20-1}$$

$$a_{20} = a_1 \cdot q^{20-1}$$

$$a_{20} =$$

$$a^2 \cdot (a^3)^{19}$$

$$a_{20} = a^2 \cdot a^{3 \cdot 19}$$

$$a_{20} =$$

$$a^2 \cdot a^{57}$$

$$a_{20} = a^{2+57}$$

$$\mathbf{a_{20} = a^{59}}$$