

AULA 14
PROGRESSÃO ARITMÉTICA
TERMOS EQUIDISTANTES E SOMA DOS TERMOS

Revisão das formulas vistas na aula 13

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

ou

$$a_n = a_m + (n - m).r$$

Exemplo:

Calcular o décimo quinto termo da P.A.

(10; 14; 18; ...)

Resolução:

$$a_1 = 10$$

$$r = 14 - 10 = 4$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1).r$$

$$a_{15} = a_1 + 14.r$$

$$a_{15} = 10 + 14.4$$

$$a_{15} = 10 + 56$$

$$a_{15} = 66$$

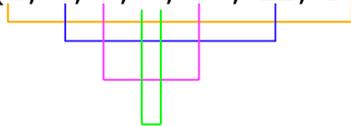
Termo médio

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Termos equidistantes

Em toda P.A. a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

P.A.(2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; ...)



Note que:

$$2 + 14 = 4 + 12 = 6 + 10 = 8 + 8 = 16$$

P.A.($a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; \dots$)

$$\begin{array}{cccc}
 \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown \\
 a_1 + a_7 & = & a_2 + a_6 & = & a_3 + a_5 & = & a_4 + a_4 \\
 8 & & 8 & & 8 & & 8
 \end{array}$$

Exemplo: Em uma P.A.

$$a_1 + a_{10} = a_3 + a_n$$

$$11 \quad 11$$

$$n = 8$$

Soma dos termos de uma P.A.

A soma dos termos de uma P.A. é a média aritmética dos extremos

$\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ multiplicada pelo número de termos (n).

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Exemplo₁:

Calcule a soma dos vinte primeiros termos da seqüência

(1; 3; 5; 7; ...)

Resolução:

$$r = 3 - 1 = 2$$

$$a_1 = 1$$

$$n = 20$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1).r$$

$$a_{20} = a_1 + 19.r$$

$$a_{20} = 1 + 19.2$$

$$a_{20} = 1 + 38 = 39$$

$$a_1 = 1$$

$$n = 20$$

$$a_{20} = 39$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}).20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(1+39).20}{2}$$

$$S_{20} = 40.10$$

$$S_{20} = 400$$

Exemplo 2 :

Calcule a soma de todos os inteiros consecutivos de 1 a 100.

Resolução:

(1; 2; 3; ... ; 100) = P.A.

$$a_1 = 1$$

$$n = 100$$

$$a_{100} = 100$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}).100}{2}$$

$$S_{100} = (1 + 100).50$$

$$S_{100} = 101.50$$

$$S_{100} = 5050$$

Exercícios:

1) Se numa P.A. $a_1 + a_9 = 60$, calcule:

a) $a_3 + a_7$

b) $a_4 + a_6$

c) a_5

2) Calcule a soma dos n primeiros números naturais ímpares.

3) Qual o número mínimo de termos da seqüência (-50; -48; -46; ...) que devem ser somados para que o resultado seja um número positivo?

4) Calcule a soma dos vinte primeiros termos da progressão aritmética (2; x - 1; 10;...)

5) Monte uma formula para calcular a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (7; 10; 13; 16; ...)

RESOLUÇÃO:

Exercícios:

1) Se numa P.A. $a_1 + a_9 = 60$, calcule:

a) $a_3 + a_7$

b) $a_4 + a_6$

c) a_5

Resolução:

P.A. ($a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; a_8; a_9; \dots$)

$$a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = a_5 + a_5$$

a) $a_3 + a_7 = a_1 + a_9 = 60$

b) $a_4 + a_6 = a_1 + a_9 = 60$

c) $a_5 + a_5 = a_1 + a_9 = 60$

$$2 \cdot a_5 = 60$$

$$a_5 = \frac{60}{2}$$

$$a_5 = 30$$

2) Calcule a soma dos n primeiros números naturais ímpares.

Resolução:

P.A. ($1; 3; 5; 7; \dots$)

$$a_1 = 1 \text{ e } r = 3 - 1 = 2$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$$

$$a_n = 1 + 2n - 2$$

$$a_n = 2n - 1$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2}$$

$$S_n = \frac{(2n) \cdot n}{2}$$

$$S_n = n^2$$

3) Qual o número mínimo de termos da seqüência (-50; -48; -46; ...) que devem ser somados para que o resultado seja um número positivo?

Resolução:

$(-50; -48; -46; \dots) = P.A.$

$$a_1 = -50 \text{ e } r = -48 - (-50) = -48 + 50 = 2$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_n = -50 + (n - 1).2$$

$$a_n = -50 + 2n - 2$$

$$a_n = -52 + 2n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_n = \frac{[-50 + (-52 + 2n)].n}{2}$$

$$S_n = \frac{(-102 + 2n).n}{2}$$

$$S_n = \frac{(-102 + 2n).n}{2}$$

(como $S_n > 0$)

$$\frac{(-102 + 2n).n}{2} > 0$$

$$(-102 + 2n).n > 0$$

$$(-102 + 2n).n > 0$$

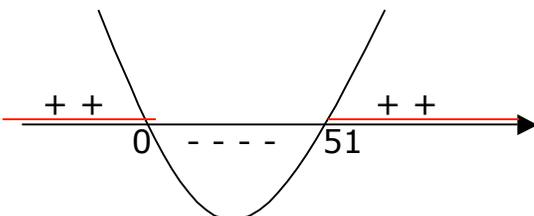
Para $(-102 + 2n).n = 0$

Temos; $n = 0$

Ou $-102 + 2n = 0$

$$2n = 102$$

$$n = 51$$



$n < 0$ (Não serve)

$n > 51$

Como o número de termos deve ser mínimo, então $n = 52$

Resposta 52 termos

4) Calcule a soma dos vinte primeiros termos da progressão aritmética

(2; x - 1; 10;...)
P.A.(2; x - 1; 10;...)

$$x - 1 = \frac{2+10}{2}$$

$$x - 1 = 6$$

$$x = 7$$

P.A.(2; 6; 10;...)

$$a_1 = 2$$

$$r = 6 - 2 = 4$$

$$n = 20$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1).r$$

$$a_{20} = a_1 + 19.r$$

$$a_{20} = 2 + 19.4$$

$$a_{20} = 2 + 76 = 78$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}).20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(2 + 78)20}{2}$$

$$S_{20} = 800$$

5) Monte uma formula para calcular a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (7; 10; 13; 16; ...)

Resolução:

$$a_1 = 7 \text{ e } r = 10 - 7 = 3$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_n = 7 + (n - 1).3$$

$$a_n = 7 + 3n - 3$$

$$a_n = 4 + 3n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$S_n = \frac{(7 + 4 + 3n).n}{2}$$

$$S_n = \frac{(11 + 3n).n}{2}$$

$$= 3n^2 + 11n$$

