

AULA 13

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Progressão aritmética é uma seqüência na qual cada termo é o termo anterior mais a razão.

Exemplo:

A seqüência (1; 3; 5; 7; 9; 11; ...) é uma progressão aritmética com primeiro termo 1 e razão 2.

Note que $3 = 1 + 2$; $5 = 3 + 2$; $7 = 5 + 2$...

Para calcular a razão, basta fazer um termo menos o anterior

$$r = 3 - 1 \text{ ou } r = 5 - 3 \text{ ou } r = 7 - 5 \dots$$

O primeiro termo da progressão é chamado a_1 , o segundo termo a_2 , o terceiro termo a_3 e assim por diante. Um termo genérico da seqüência é chamado a_n .

A seqüência pode ser representada por:

$$a_n = (a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots)$$

TERMO GERAL

Como já foi visto, cada termo de uma P.A. é o anterior mais a razão (r), assim:

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r$$

.

.

.

$$a_n = a_1 + (n - 1).r \text{ (termo geral da P.A.)}$$

Exemplo₁:

- Calcular o vigésimo termo da P.A. (1, 3, 5, 7, 9, ...)

Resolução:

$$a_1 = 1$$

$$r = 3 - 1 = 2$$

$$n = 20$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1).r$$

$$a_{20} = a_1 + 19.r$$

$$a_{20} = 1 + 19.2$$

$$a_{20} = 1 + 38$$

$$a_{20} = 39$$

Exemplo₂ :

Calcule o primeiro termo de uma P.A. em que o décimo termo é 100 e a razão é 4.

Resolução:

$$a_{10} = 100$$

$$r = 4$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1).r$$

$$a_{10} = a_1 + 9.r$$

$$100 = a_1 + 9.4$$

$$100 = a_1 + 36$$

$$100 - 36 = a_1$$

$$a_1 = 64$$

Sendo a_n e a_m dois termos quaisquer da P.A., então:

$$a_n = a_m + (n - m).r$$

Exemplo:

Calcule a razão de uma P.A. em que o quarto termo é 25 e o décimo termo é 43.

Resolução:

$$a_4 = 25 \text{ e } a_{10} = 43$$

$$a_n = a_m + (n - m).r$$

$$a_{10} = a_4 + (10 - 4).r$$

$$a_{10} = a_4 + 6.r$$

$$43 = 25 + 6.r$$

$$43 - 25 = 6.r$$

$$18 = 6.r$$

$$6.r = 18$$

$$r = \frac{18}{6}$$

$$r = 3$$

TERMO MÉDIO DA P.A.

Em toda P.A. cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre o anterior e o posterior.

P.A. (7, 9, 11, ...)

$$\frac{7+11}{2} = 9$$

P.A. (27, x, 35, ...)

$$x = \frac{27 + 35}{2}$$

$$x = \frac{62}{2} = 31$$

P.A. ($a_1; a_2; a_3; \dots; a_{n-1}; a_n; a_{n+1}; \dots$)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Exemplo:

- Calcule o valor de x na P.A. (x + 5, 3x + 6, 4x + 9, ...)

Resolução:

$$3x + 6 = \frac{x + 5 + 4x + 9}{2}$$

$$2.(3x + 6) = 5x + 14$$

$$6x + 12 = 5x + 14$$

$$6x - 5x = 14 - 12$$

$$x = 2$$

EXERCÍCIOS

- 1) Calcule a razão de uma P.A. em que o primeiro termo é 10 e o décimo quinto termo é 80.
 - 2) Inserindo-se cinco meios aritméticos entre 7 e 25 obtemos uma progressão aritmética cujo terceiro termo é:
a) 3 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13
 - 3) Calcular o primeiro termo de uma P.A. em que o quinto termo é 17 e o décimo segundo termo é 52.
 - 4) Os lados de um triângulo retângulo formam uma P.A. DE razão 2. A área desse triângulo é:
a) 2 b) 12 c) 48 d) 24 e) 36
 - 5) Sabendo que $2x - 4$; $4x$ e $7x + 1$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética, calcule a razão.
-

RESOLUÇÃO:

- 1) Calcule a razão de uma P.A. em que o primeiro termo é 10 e o décimo quinto termo é 80.

Resolução:

$$a_1 = 10 \text{ e } a_{15} = 80$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1).r$$

$$a_{15} = a_1 + 14.r$$

$$80 = 10 + 14.r$$

$$80 - 10 = 14.r$$

$$70 = 14.r$$

$$\frac{70}{14} = r$$

$$r = 5$$

2) Inserindo-se cinco meios aritméticos entre 7 e 25 obtemos uma progressão aritmética cujo terceiro termo é:

a) 3 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13

Resolução:

P.A. (7; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; a_6 ; 25)

$$a_1 = 7 \text{ e } a_7 = 25$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_7 = a_1 + (7 - 1).r$$

$$a_7 = a_1 + 6.r$$

$$25 = 7 + 6.r$$

$$25 - 7 = 6.r$$

$$18 = 6.r$$

$$\frac{18}{6} = r$$

$$r = 3$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_3 = a_1 + (3 - 1).r$$

$$a_3 = a_1 + 2.r$$

$$a_3 = 7 + 2.3$$

$$a_3 = 7 + 6$$

$$a_3 = 13$$

Resposta **e**

3) Calcular o primeiro termo de uma P.A. em que o quinto termo é 17 e o décimo segundo termo é 52.

Resolução:

$$a_5 = 17 \text{ e } a_{12} = 52$$

$$a_n = a_m + (n - m).r$$

$$a_{12} = a_5 + (12 - 5).r$$

$$a_{12} = a_5 + 7.r$$

$$52 = 17 + 7.r$$

$$52 - 17 = 7.r$$

$$35 = 7.r$$

$$\frac{35}{7} = r$$

$$r = 5$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_5 = a_1 + (5 - 1).r$$

$$a_5 = a_1 + 4.r$$

$$17 = a_1 + 4.5$$

$$17 = a_1 + 20$$

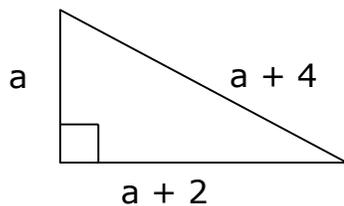
$$17 - 20 = a_1$$

$$\mathbf{a_1 = -3}$$

4) Os lados de um triângulo retângulo formam uma P.A. de razão 2. A área desse triângulo em unidades de área é:

a) 2 b) 12 c) 48 d) 24 e) 36

Resolução:



(Teorema de Pitágoras)

$$(a + 4)^2 = (a + 2)^2 + a^2$$

$$a^2 + 8a + 16 = a^2 + 4a + 4 + a^2$$

$$a^2 + 8a + 16 - a^2 - 4a - 4 - a^2 = 0$$

$$-a^2 + 4a + 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(-1).12$$

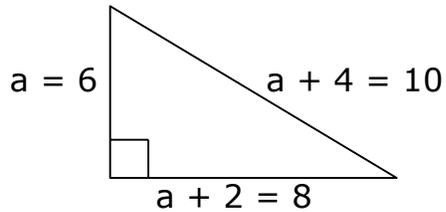
$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2.(-1)}$$

$$a = \frac{-4 \pm 8}{-2}$$

$$a' = \frac{-4 + 8}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \text{ (Não serve)}$$

$$a'' = \frac{-4 - 8}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2}$$

$$A = 24 \text{ u.a.}$$

Resposta **d**

5) Sabendo que $2x - 4$; $4x$ e $7x + 1$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética, calcule a razão.

Resolução:

P.A. ($2x - 4$; $4x$; $7x + 1$)

$$4x = \frac{(2x - 4) + (7x + 1)}{2}$$

$$2 \cdot 4x = 2x - 4 + 7x + 1$$

$$8x = 9x - 3$$

$$8x - 9x = -3$$

$$-x = -3 \quad \cdot (-1)$$

$$x = 3$$

P.A. ($2x - 4$; $4x$; $7x + 1$)

P.A. ($2 \cdot 3 - 4$; $4 \cdot 3$; $7 \cdot 3 + 1$)

P.A. (2; 12; 22)

$$r = 12 - 2$$

$$\mathbf{r = 10}$$