

MATEMÁTICA

Aula 10

FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARITMOS

TÓPICOS

- DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL
- LOGARITMOS: DEFINIÇÃO
PROPRIEDADES

Função Exponencial

Vejamos a definição de função exponencial:

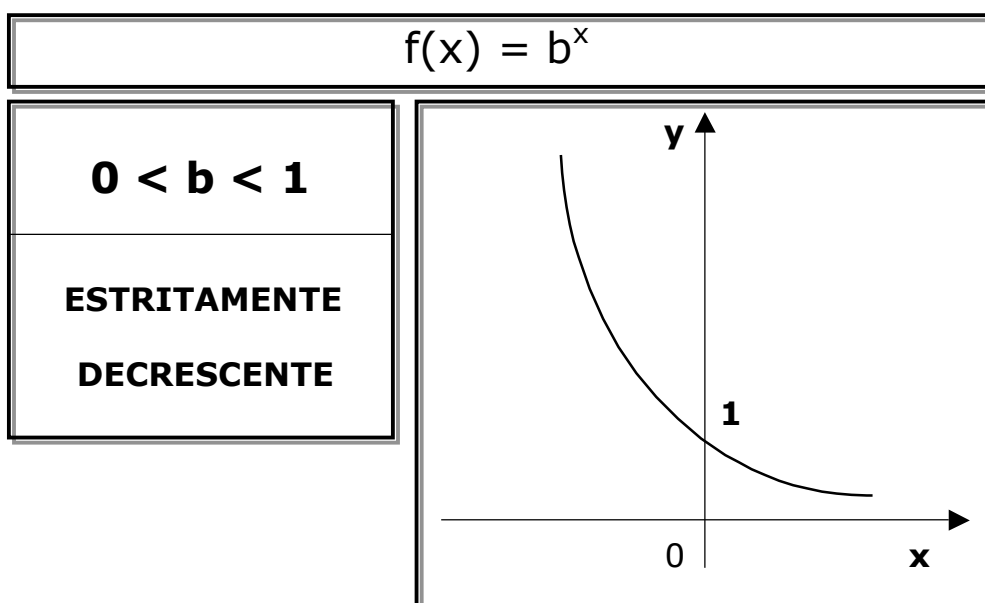
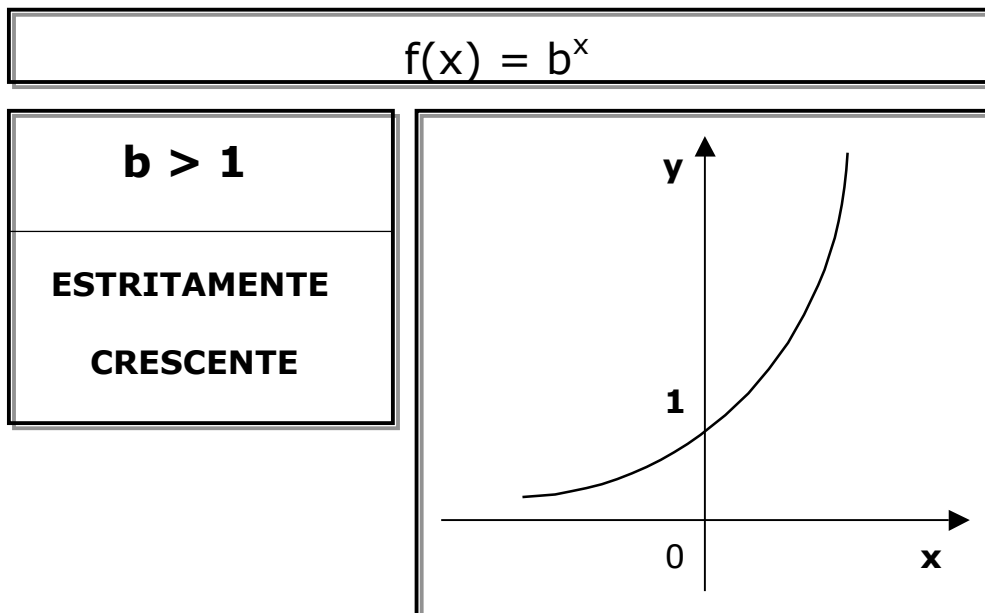
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ definida por } x \mapsto y = b^x, \text{ com } b > 0 \text{ e } b \neq 1.$$

Domínio :

Contradomínio :

b é a base da função

O gráfico depende da base b :



Exercício 1

O número de bactérias de uma certa cultura pode ser previsto pela função $N = 2,0 \cdot 10^{23} \cdot e^{kt}$, onde e é um número irracional, k é uma constante positiva e t é o tempo em dias. Observado que o número inicial aumentou 100 vezes em dois dias, qual o número de bactérias após 30 dias?

Logaritmo

Definição: $\log_b N = x \iff b^x = N$

Notação: N é o logaritmando ou antilogaritmo

b é a base do logaritmo

Condições de existência :

$$b > 0$$

$$b \neq 1$$

$$N > 0$$

Exemplos:

$$1) \log_2 4 = x \quad \square \quad 2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

$$\square \quad \boxed{\log_2 4 = 2}$$

$$2) \log_4 2 = x \quad \square \quad 4^x = 2$$

$$2^{2x} = 2^1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\square \quad \boxed{\log_4 2 = \frac{1}{2}}$$

$$3) \log_b 1 = x \quad \square \quad b^x = 1$$

$$b^x = b^0$$

$$x = 0$$

$$\square \quad \boxed{\log_b 1 = 0}$$

$$4) \log_b b = x \quad \square \quad b^x = b$$

$$b^x = b^1$$

$$x = 1$$

$$\square \quad \boxed{\log_b b = 1}$$

$$5) \log_b b^k = x \quad \square \quad b^x = b^k$$

$$x = k$$

$$\square \quad \log_b b^k = 1$$

$$6) \quad \log_b N = N$$

$$\log_3 5 = 5$$

SISTEMAS NOTÁVEIS

Logaritmo decimal $\square$ base 10

$$\log_{10} x = \log x$$

Logaritmo natural $\square$ base $e = 2,71828\dots$

$$\log_e x = \ln x$$

Propriedades:

LOGARITMO DO PRODUTO

$$\log_b(M.N) = \log_b M + \log_b N$$

LOGARITMO DO QUOCIENTE

$$\log_b(M/N) = \log_b M - \log_b N$$

LOGARITMO DA POTÊNCIA

$$\log_b M^K = K \cdot \log_b M$$

MUDANÇA DE BASE

$$\log_b N = \frac{\log_c N}{\log_c b}$$

Exercício 2

Se

$$\frac{1}{\log_x 3} + \frac{1}{\log_{\sqrt{x}} 3} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{x}} 3} + \frac{1}{\log_{\sqrt[8]{x}} 3} = \frac{15}{8}$$

quanto vale $\log_3 x$?

Resolução do exercício 1.

$$N = 2,0 \cdot 10^{23} \cdot e^{kt}$$

I) Número inicial N_0 de bactérias:

$$t = 0 \quad \square \quad N_0 = 2,0 \cdot 10^{23} \cdot e^{k \cdot 0}$$

$$N_0 = 2,0 \cdot 10^{23} \cdot e^0$$

$$N_0 = 2,0 \cdot 10^{23} \quad \square \quad N = N_0 \cdot e^{kt}$$

II) Para $t = 2 \quad \square \quad N = 100 \cdot N_0$ (dado)

$$N_0 \cdot e^{k \cdot 2} = 100 \cdot N_0$$

$$e^{k \cdot 2} = 100$$

$$(e^k)^2 = 10^2$$

$$e^k = 10 \quad \square \quad N = N_0 \cdot 10^t$$

III) Para $t = 30 \quad \square \quad N = N_0 \cdot 10^{30}$

$$N = 2,0 \cdot 10^{23} \cdot 10^{30}$$

$$\square \quad N = 2,0 \cdot 10^{53} \text{ bactérias}$$

Resolução do exercício 2.

$$\log_b N = \frac{\log_N N}{\log_N b} = \frac{1}{\log_N b}$$

$$\frac{1}{\log_x 3} + \frac{1}{\log_{\sqrt{x}} 3} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{x}} 3} + \frac{1}{\log_{\sqrt[8]{x}} 3} = \frac{15}{8}$$

$$\log_3 x + \log_3 \sqrt{x} + \log_3 \sqrt[4]{x} + \log_3 \sqrt[8]{x} = \frac{15}{8}$$

$$\log_3 (x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}}) = \frac{15}{8}$$

$$\log_3 x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = \frac{15}{8}$$

$$\log_3 x^{\frac{8+4+2+1}{8}} = \frac{15}{8}$$

$$\log_3 x^{\frac{15}{8}} = \frac{15}{8}$$

$$\frac{15}{8} \cdot \log_3 x = \frac{15}{8}$$

$$\log_3 x = 1$$