MATEMÁTICA

Aula 9

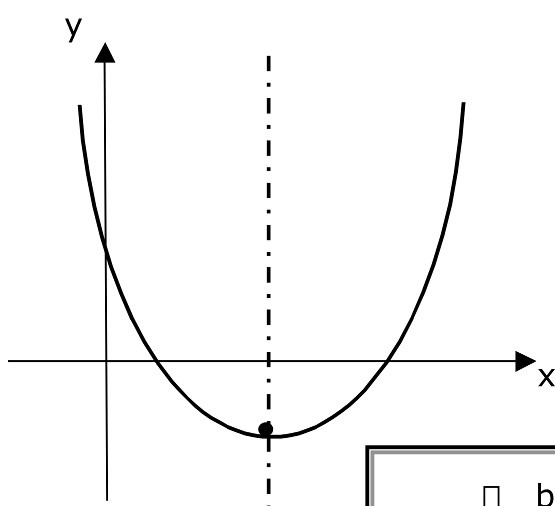
VÉRTICE DA PARÁBOLA

IMAGEM DA FUNÇÃO DE 2º GRAU

TÓPICOS

-OBTENÇÃO DO VÉRTICE
-OBTENÇÃO DA IMAGEM

Sendo a função $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$, na figura temos em destaque o vértice V:

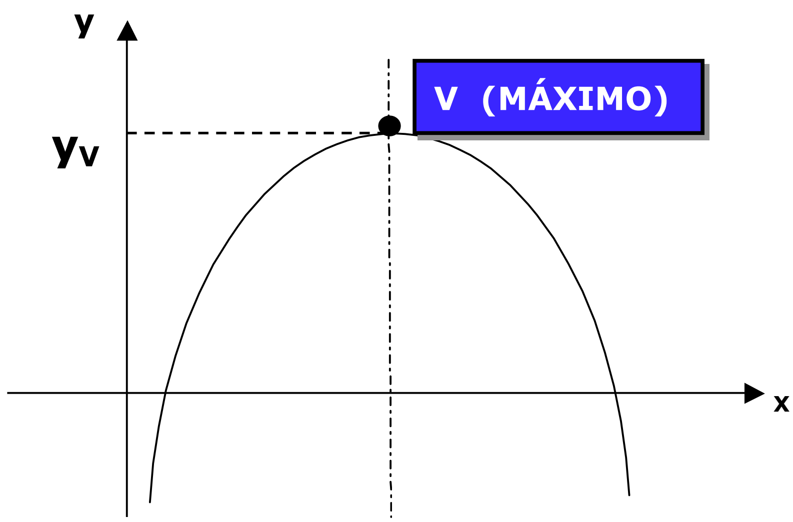


$$\boxed{V = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a} \right)}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$

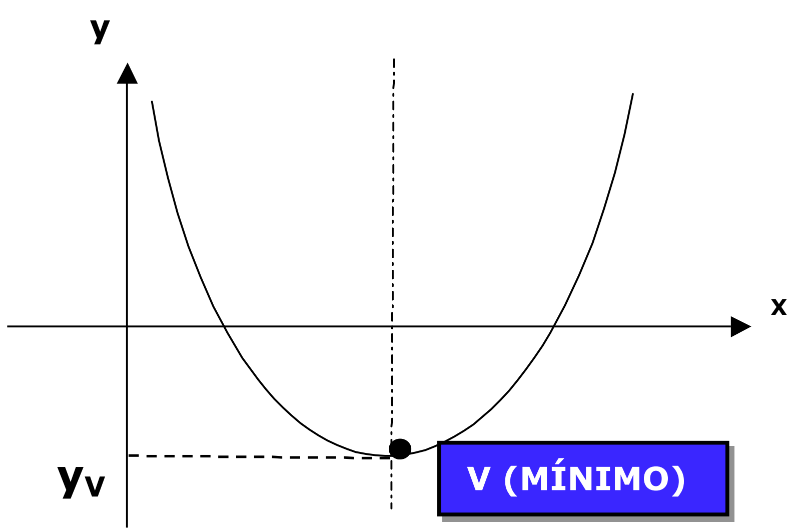
Observe que dependendo do valor de a, podemos ter:

- Para a>0:



$$Im = \{y \in \mathbb{R} \;/\; y \leq y_V\}$$

-Para a<0:



$$Im = \{y \in \mathbb{R} \;/\; y \geq y_V\}$$

Exercício 1

O salto dado por um golfinho descreve uma trajetória parabólica representada pela função $y = x - 0,5x^2$, com x e y em metros. Qual é a altura máxima atingida pelo golfinho?

Exercício 2

Um criador resolve com 20m de tela, construir um cercado para seus animais. De todos os retângulos possíveis, o criador quer determinar aquele de maior área. Que dimensões deverá este retângulo ter?

Exercício 3

O lucro mensal, em reais, de uma empresa, pela venda de *x* máquinas é dada por L(x)= 100(x-40)(100-x). Que quantidade deve-se vender, por mês, para obter lucro máximo? Qual o lucro máximo?

Exercício 4

Uma pérola é enfiada em um arame fino com o formato da parábola $y = x^2 - 4$. Deixa-se a pérola deslizar até chegar em seu ponto mais baixo. Quais as coordenadas desse ponto?

Exercício 5

Uma bola, ao ser chutada num tiro de meta por um goleiro, numa partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t)=-2t^2+8t$, em que t é o tempo em segundos e $h(t)$ é a altura em metros da bola no instante t. Determine, após o chute:

a) o instante em que a bola retornará ao solo;

b) a altura máxima atingida pela bola.

Resolução exercício 1

Se $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow \boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$

$y = x - 0,5x^2$

$$\Rightarrow x_v = -\frac{1}{2.(-0,5)}$$

$$\Rightarrow x_v = -\frac{1}{-1}$$

$$\Rightarrow x_V = 1$$

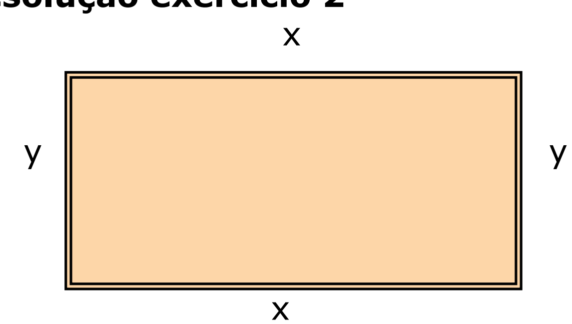
Como $y_v = x_v - 0,5x_V^2$

$$\Rightarrow y_V = 1 - 0,5.1^2$$

$$\Rightarrow y_V = 1 - 0,5$$

$$\Rightarrow \boxed{y_V = 0,5\,m}$$

Resolução exercício 2



I) Área = x.y

II) Perímetro = 20

$\Rightarrow 2x + 2y = 20$

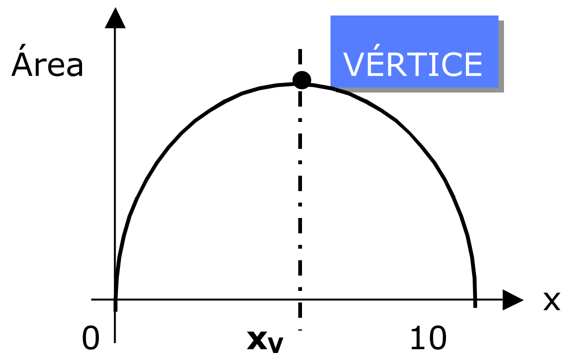
$\Rightarrow x + y = 10$

Assim temos:

$\boxed{\text{Área} = x.(10-x)}$

Raízes: $x.(10-x) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ ou $x = 10$



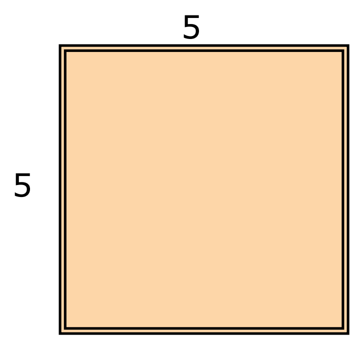
$\boxed{x_V = 5}$ (por simetria)

Como $y = 10 - x$

$\Rightarrow$ $y_V = 10 - x_V$

$\Rightarrow$ $y_V = 10 - 5$

$\Rightarrow$ $\boxed{y_V = 5}$



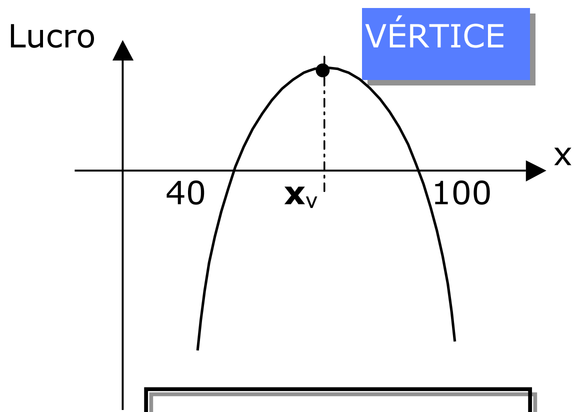
Assim, concluímos tratar-se de um quadrado de lados 5 que me dá área máxima.

Resolução exercício 3

$$L(x) = 100.(x-40).(100-x)$$

Raízes: $100.(x-40).(100-x) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 40$ ou $x = 100$



Por simetria: $$x_V = \frac{40+100}{2} = 70$$

Portanto deve-se vender 70 peças para obter lucro máximo.

Como $L(x) = 100.(x-40).(100-x)$

$L(70) = 100.(70-40).(100-70)$

$L(70) = 100.30.30$

$\Rightarrow$ $\boxed{L(70) = 90.000 \text{ reais}}$ (valor do lucro máximo)

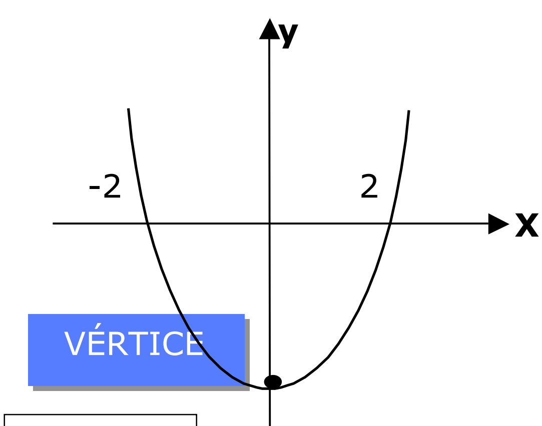
Resolução exercício 4

$$y = x^2 - 4$$

Raízes : $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$\Rightarrow$ $x = \pm 2$



$$y = x^2 - 4$$

$$y_v = x_v^2 - 4$$

$$y_v = 0^2 - 4$$

$$y_v = -4$$

$$\Rightarrow \boxed{V = (0;-4)}$$

Resolução exercício 5

$$h(t) = -2t^2 + 8t$$

a) Retorna ao solo: $h(t) = 0$

$$-2t^2 + 8t = 0$$

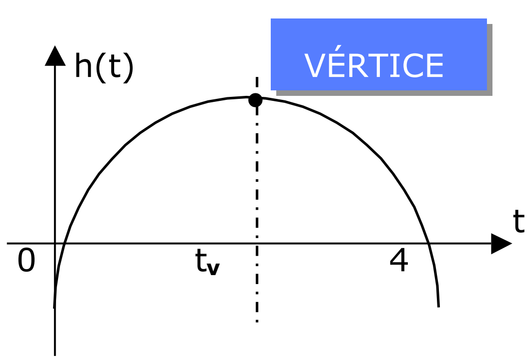
$$2t.(-t + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ -t + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 4s} \end{cases}$$

Portanto, a bola retorna ao solo após 4 segundos.

$$h(t) = -2t^2 + 8t$$

b)



Do gráfico: t_v=2s (por simetria)

$$h(2) = -2.2^2 + 8.2$$

$$h(2) = -2.4 + 16$$

$$h(2) = -8 + 16$$

$$\boxed{h(2) = 8m}$$