

AULA 3

FATORAÇÃO

DEFINIÇÃO:

Fatorar é transformar uma soma de duas ou mais parcelas em um produto de dois ou mais fatores.

Podemos separar a fatoração em seis casos.

PRIMEIRO CASO – FATOR COMUM

Este caso é usado quando algum elemento é comum a todas as parcelas.

Exemplo:

$$ab + ac = a.(b + c)$$

Obs.₁:

Havendo potências, colocamos em evidência somente as comuns de menor expoente.

Exemplos:

$$1) a^4 b^5 c^2 - a^2 b^7 c = a^2 b^5 c.(a^2 c - b^2)$$

$$2) x^3 y^7 + x^2 y^3 = x^2 y^3.(xy^4 + 1)$$

$$3) x^2 y^9 z^2 - x^3 y^4 w = x^2 y^4.(y^5 z^2 - xw)$$

Obs.₂:

Havendo números, colocamos em evidência o máximo divisor comum.

Exemplos:

$$1) 27x^2 y + 12xy^2 = 3xy(9x + 4y)$$

$$2) 48x^4 - 36x^2 + 24x = 12x.(4x^3 - 3x + 2)$$

$$3) 64a^5 c^4 - 20a^3 = 4a^3.(16a^2 c^4 - 5)$$

SEGUNDO CASO – AGRUPAMENTO

Exemplos:

Fatore:

$$1) ax + ay + bx + by$$

Resolução:

$$\begin{array}{cc} ax+ay & + & bx+by & = \\ \underline{1\ 2\ 3} & & \underline{1\ 2\ 3} & \end{array}$$

$$a.(x + y) + b.(x + y) =$$
$$(x + y).(a + b)$$

$$2) 5ax - 10ay + 4bx - 8by$$

Resolução:

$$\begin{array}{r} 5ax \square 10ay \\ 1-2-3 \end{array} + \begin{array}{r} 4bx \square 8by \\ 1-2-3 \end{array} =$$

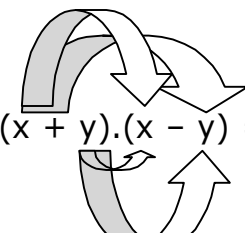
$$= 5a.(x - 2y) + 4b.(x - 2y) =$$

$$= (x - 2y).(5a + 4b)$$

TERCEIRO CASO – DIFERENÇA DE QUADRADOS

O produto da soma de dois números pela diferença é a diferença entre os quadrados dos dois números.

$(x + y).(x - y) = x^2 - y^2$, pois:



$$(x + y).(x - y) = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{xy} - y^2 = x^2 - y^2$$

Exemplos₁:

Desenvolva:

1) $(a + b).(a - b)$

Resolução:

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

2) $(5 + 7a).(5 - 7a)$

Resolução:

$$(5 + 7a).(5 - 7a) = 5^2 - (7a)^2 = 25 - 49a^2$$

3) $(12x - 3y).(12x + 3y)$

Resolução:

$$(12x - 3y).(12x + 3y) = (12x)^2 - (3y)^2 = 144x^2 - 9y^2$$

Exemplos₂:

Fatore:

1) $x^2 - 49$

Resolução:

$$x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7).(x + 7)$$

2) $64x^4 - 36z^2$

Resolução:

$$64x^4 - 36z^2 = (8x^2 - 6z).(8x^2 + 6z)$$

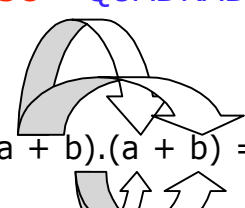
3) $1 - x^4$

Resolução:

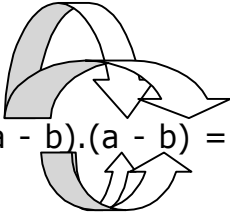
$$1 - x^4 = (1 - x^2).(1 + x^2) = (1 - x).(1 + x).(1 + x^2)$$

QUARTO CASO – QUADRADO PERFEITO

DEFINIÇÃO:



$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a - b)^2 = (a - b).(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Portanto:

- O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro **mais** duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo.
- O quadrado da diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro **menos** duas vezes o primeiro vezes o segundo mais o quadrado do segundo.

Assim:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplos₁:

Desenvolva:

$$1) (x + 3y)^2 = x^2 + 2.x.3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$$

$$1) (7 - 2z)^2 = 7^2 - 2.7.2z + (2z)^2 = 49 - 28z + 4z^2$$

$$1) (4a - 3b)^2 = (4a)^2 - 2.4a.3b + (3b)^2 = 16a^2 - 24ab + 9b^2$$

Exemplos₂:

Fatore:

$$1) 36p^2 + 48kp + 16k^2$$

Resolução:

$$36p^2 + 48kp + 16k^2 = (6p)^2 + 2.6p.4k + (4k)^2 = (6p + 4k)^2$$

$$2) 9 - 30x^2 + 25x^4$$

Resolução:

$$9 - 30x^2 + 25x^4 = 3^2 - 2.3.5x^2 + (5x^2)^2 = (3 - 5x^2)^2$$

QUINTO CASO – SOMA E DIFERENÇA DE CUBOS

$$(a + b).(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b).(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Exemplos₁:

Desenvolva:

$$1) (2 - x).(4 + 2x + x^2)$$

Resolução:

$$(2 - x).(4 + 2x + x^2) = 2^3 - x^3 = 8 - x^3$$

$$1) (x + 3y).(x^2 - 3xy + 9y^2)$$

Resolução:

$$(x + 3y).(x^2 - 3xy + 9y^2) = x^3 + (3y)^3 = x^3 + 27y^3$$

$$1) (2a - 3b).(4a^2 + 6ab + 9b^2)$$

Resolução:

$$(2a - 3b).(4a^2 + 6ab + 9b^2) = (2a)^3 - (3b)^3 = 8a^3 - 27b^3$$

Exemplos₂ :

Fatorar:

$$1) x^3 - 64$$

Resolução:

$$x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4).(x^2 + 4x + 16)$$

$$1) 27a^3 + 8c^6$$

Resolução:

$$27a^3 + 8c^6 = (3a)^3 + (2c^2)^3 = (3a + 2c^2).(9a^2 - 6ac^2 + 4c^4)$$

$$1) 1000 + g^3$$

Resolução:

$$1000 + g^3 = 10^3 + g^3 = (10 + g).(100 - 10g + g^2)$$

SEXTO CASO – CUBO PERFEITO

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

O cubo da **soma** de dois números é igual ao cubo do primeiro **mais** três vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo mais três vezes o primeiro vezes o quadrado do segundo **mais** o cubo do segundo.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

O cubo da **diferença** de dois números é igual ao cubo do primeiro **menos** três vezes o quadrado do primeiro vezes o segundo mais três vezes o primeiro vezes o quadrado do segundo **menos** o cubo do segundo.

Exemplos₁ :

Desenvolva:

$$1) (2 + x)^3$$

Resolução:

$$(2 + x)^3 = 2^3 + 3.2^2.x + 3.2.x^2 + x^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3$$

$$2) (x - 4y)^3$$

Resolução:

$$\begin{aligned} (x - 4y)^3 &= x^3 - 3.x^2.4y + 3.x.(4y)^2 - (4y)^3 = \\ &= x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3 \end{aligned}$$

$$3) (2x - 3)^3$$

Resolução:

$$(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3.(2x)^2.3 + 3.2x.3^2 - 3^3 = \\ = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Exemplos₂ :

Fatore:

$$1) 64 - 48x + 12x^2 - x^3$$

Resolução:

$$64 - 48x + 12x^2 - x^3 = 4^3 - 3.4^2x + 3.4.x^2 - x^3 = (4 - x)^3$$

$$2) 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Resolução:

$$1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1^3 + 3.1^2.x + 3.1.x^2 + x^3 = (1 + x)^3$$

$$3) 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$$

Resolução:

$$27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 = \\ = (3x)^3 + 3.(3x)^2.2y + 3.3x.(2y)^2 + (2y)^3 = (3x + 2y)^3$$

Exercícios:

1) Simplifique as frações, supondo o denominador diferente de zero:

a) $\frac{ax + ay}{az + aw}$

b) $\frac{x^2 - 3xy}{2xy^2 - 6y^3}$

c) $\frac{10ax + 6ay - 5x - 3y}{15x + 9y}$

2) Calcular o valor de $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$, sabendo que $x = 1527$ e $y = 1511$

3) Calcule $7865^2 - 7864^2$

4) Calcular o valor de $\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$, sabendo que $a = 132$ e $b = 131$

5) Simplifique a expressão, supondo os denominadores diferentes de zero.

$$\frac{a^2 - ab}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{ax - bx + ay - by}{a}$$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS:

1)

$$a) \frac{ax+ay}{az+aw} = \frac{a(x+y)}{a(z+w)} = \frac{x+y}{z+w}$$

$$b) \frac{x^2 - 3xy}{2xy^2 - 6y^3} = \frac{x(x-3y)}{2y^2(x-3y)} = \frac{x}{2y^2}$$

$$c) \frac{10ax+6ay-5x-3y}{15x+9y} = \frac{2y^2(x-3y)}{2a(5x+3y)-1(5x+3y)} = \frac{(5x+3y).(2a-1)}{3(5x+3y)} = \frac{2a-1}{3}$$

$$2) \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}$$

como $x = 1527$ e $y = 1511$, então:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{1527+1511}{1527-1511} = \frac{3038}{16} = \frac{1519}{8}$$

$$3) 7865^2 - 7864^2 = (7865 - 7864).(7865 + 7864) = 1.(15729) = 15729$$

$$4) \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a-b).(a^2 + ab + b^2)}{(a^2 + ab + b^2)} = a - b$$

como $a = 132$ e $b = 131$, então:
 $a - b = 132 - 131 = 1$

$$5) \frac{a^2 - ab}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{ax + bx + ay + by}{a} =$$

$$= \frac{a(a-b)}{(x-y).(x+y)} \cdot \frac{(x-y)^2}{(a-b).(a+b)} \cdot \frac{x(a+b) + y(a+b)}{a} =$$

$$= \frac{a(a-b)}{(x-y).(x+y)} \cdot \frac{(x-y).(x-y)}{(a-b).(a+b)} \cdot \frac{(a+b).(x+y)}{a} = x - y$$