

RADICIAÇÃO

DEFINIÇÃO:

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$ Onde a é um número Real e n um número natural não nulo.

Dizemos que b é raiz enésima de a , se e somente se, a resulta de b elevado a n .

Exemplos:

- 1) $\sqrt[2]{4} = 2$, pois $2^2 = 4$
- 2) $\sqrt[2]{9} = 3$, pois $3^2 = 9$
- 3) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$
- 4) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$
- 5) $\sqrt[3]{1} = 1$, pois $1^3 = 1$
- 6) $\sqrt[10]{0} = 0$, pois $0^{10} = 0$

Observação₁: $\sqrt[2]{-9} \nexists$, pois não existe nenhum número real que elevado a expoente par fique negativo. Pelo mesmo motivo, $\sqrt[4]{-16} \nexists$, $\sqrt[8]{-1} \nexists$ e assim por diante.

Portanto, se a é negativo e n é par então não existe raiz enésima de a , em $\mathbb{R}$.

Observação₂: Por convenção o índice **dois** da raiz quadrada pode ser omitido, assim $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$; $\sqrt[2]{7} = \sqrt{7}$

Cuidado, embora $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$ tomamos como raiz de 4 apenas o resultado estritamente positivo. Assim:

$$\begin{aligned}\sqrt{4} &= 2 \\ -\sqrt{4} &= -2 \\ \pm\sqrt{4} &= \pm 2 \\ \sqrt{4} &\neq \pm 2\end{aligned}$$

PROPRIEDADES DA RADICIAÇÃO

$$1) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Exemplos:

$$\begin{aligned}a) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} &= \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 & \sqrt{32} &= \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} \\ b) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3 & \sqrt{8} &= \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \\ c) \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} &= \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6 & \sqrt[3]{81} &= \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

$$2) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplos:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2 & \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3} \\ \text{b)} \quad \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3 & \sqrt[3]{\frac{9}{8}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{2} \end{array}$$

$$3) \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Exemplos:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad (\sqrt{2})^5 = \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = 4 & \sqrt{4^5} = (\sqrt{4})^5 = (2)^5 = 32 \\ \text{b)} \quad (\sqrt[4]{2})^3 = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8} & \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4 \end{array}$$

$$4) \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

Exemplos:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2 & \sqrt[6]{4} = \sqrt[3 \cdot 2]{4} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2} \\ \text{b)} \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[5 \cdot 3]{32} = \sqrt[15]{32} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[5]{2} & \sqrt[4]{9} = \sqrt[2 \cdot 2]{9} = \sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3} \end{array}$$

$$5) \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^m}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{p}}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Exemplos:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^{2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4} & \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[2]{3^1} \cdot \sqrt[6]{5^1} = \sqrt[2 \cdot 3]{3^1 \cdot 5^1} = \sqrt[6]{3^1 \cdot 5^1} = \\ & = \sqrt[6]{27 \cdot 5} = \sqrt[6]{27 \cdot 5} = \sqrt[6]{135} \\ \text{b)} \quad \sqrt[9]{5^6} = \sqrt[3 \cdot 3]{5^{2 \cdot 3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \end{array}$$

Potência com expoente fracionário (racional)

Definição:

Dado um número racional $\frac{n}{m}$ e um número real não negativo **a**,

podemos dizer que $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ ou $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

Exemplos:

$$\text{a)} \quad 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$$

$$b) 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7^1}$$

$$c) \sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{6^1} = 6^{\frac{1}{5}}$$

$$d) \sqrt{3} = \sqrt[2]{3^1} = 3^{\frac{1}{2}}$$

Obs.:

A partir dessa propriedade e das propriedades da potenciação, podemos definir todas as propriedades da radiciação.

Exemplo:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^1} \cdot \sqrt[n]{b^1} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Racionalização de denominadores

Racionalizar consiste em eliminar todos os radicais (raízes) que aparecem na forma de denominador de uma fração, sem alterar o valor numérico das mesmas.

Para racionalizar, multiplicamos o numerador e o denominador da fração pelo mesmo valor. Ao multiplicar e dividir pelo mesmo valor, não estamos alterando o valor numérico da fração, pois, na realidade estamos multiplicando a fração por 1 (um).

Nesta aula, vamos separar a racionalização em dois tipos:

1 – Quando, no denominador, tivermos **uma** raiz quadrada:

$$a) \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$b) \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3 \cdot 3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$c) \frac{2}{3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot \sqrt{7 \cdot 7}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot \sqrt{7^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{21}$$

2 – Quando, no denominador, tivermos **uma** raiz enésima:

$$a) \frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{2}$$

$$b) \frac{4}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{4 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2 \cdot 2^3}} = \frac{4 \cdot \sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{4 \cdot \sqrt[5]{8}}{2} = 2 \cdot \sqrt[5]{8}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt[5]{9}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{27}}{3}$$

Exercícios resolvidos

1) calcule o valor de:

a) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{4}}}}$

b) $\sqrt{1 + \sqrt{32 \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt{16}}}$

c) $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{9}}}$

Resolução:

a) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{4}}}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot 2}}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{4}}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot 2}} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{4}} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{1 + \sqrt{32 \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt{16}}} = \sqrt{1 + \sqrt{32 \cdot \sqrt[3]{4} + 4}} = \sqrt{1 + \sqrt{32 \cdot \sqrt[3]{8}}} = \sqrt{1 + \sqrt{32 \cdot 2}} = \sqrt{1 + \sqrt{64}} = \sqrt{1 + 8} = \sqrt{9} = 3$

c) $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{9}}} = \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$

2) O produto $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ pode ser escrito como:

a) $\sqrt[6]{8}$ b) $\sqrt[3]{8}$ c) $\sqrt[6]{8}$ d) $\sqrt[6]{6}$ e) $2 \cdot \sqrt[6]{2}$

Resolução:

- Primeiro tiramos o mínimo múltiplo comum (mmc) entre os índices das raízes.

Mmc (2, 3) = 6

- Para transformar o índice dois da raiz quadrada em seis, multiplicamos o índice e o expoente por 3 (para não mudar o valor numérico da expressão).

$$\sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2^3}$$

- Para transformar o índice três da Segunda raiz em seis, multiplicamos o índice e o expoente por dois.

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^{2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^4}$$

$$\text{Assim: } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^4} = \sqrt[6]{2^{3+4}} = \sqrt[6]{2^7}$$

$$\text{Assim: } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^4} = \sqrt[6]{2^{3+4}} = \sqrt[6]{2^7}$$

Obs.: Como podemos notar, não existe nenhuma alternativa $\sqrt[6]{2^7}$, portanto devemos continuar a resolução.

$$\sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^{6+1}} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2^1} = \sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{2^1} = 2 \cdot \sqrt[6]{2}$$

Resposta **e**

3) Dados os números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[6]{6}$. Qual a ordem correta?

a) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[6]{6}$

b) $\sqrt[6]{6} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{3} < \sqrt{2}$

c) $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt[3]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[6]{6} < \sqrt[4]{5}$

e) $\sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[6]{6}$

Resolução:

- Tirando o mínimo entre os índices 2, 3, 4 e 6 das raízes, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 2, 3, 4, 6 & 2 \\ 1, 3, 2, 3 & 2 \\ 1, 3, 1, 3 & 3 \\ 1, 1, 1, 1 & 2 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{12} \end{array}$$

- A seguir transformamos todos os índices em 12

$$\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt[2 \cdot 6]{2^{1 \cdot 6}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^1} = \sqrt[3 \cdot 4]{3^{1 \cdot 4}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^1} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^{1 \cdot 3}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

$$\sqrt[6]{6} = \sqrt[6]{6^1} = \sqrt[6 \cdot 2]{6^{1 \cdot 2}} = \sqrt[12]{6^2} = \sqrt[12]{36}$$

Podemos notar que $36 < 64 < 81 < 125$ e, portanto, $\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

Resposta **c**

EXERCÍCIOS:

1) Calcule o valor de $\sqrt{10 + 3 \cdot \sqrt{23 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}}$

2) O valor de $16^{\frac{3}{4}} - 27^{\frac{2}{3}}$ é:

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 5

3) O produto $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ pode ser escrito como:

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt[3]{10}$ c) $\sqrt[6]{10}$ d) $\sqrt[6]{100}$ e) $\sqrt[6]{200}$

4) Racionalizar o denominador da fração $\frac{27}{\sqrt[5]{9}}$

5) O valor da expressão $(81^{\frac{3}{4}} \square 16^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Resolução:

$$1) \sqrt{10 + 3 \cdot \sqrt{23 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{10 + 3 \cdot \sqrt{23 + \sqrt{2 + 2}}} = \sqrt{10 + 3 \cdot \sqrt{23 + \sqrt{4}}} = \\ \sqrt{10 + 3 \cdot \sqrt{23 + 2}} = \sqrt{10 + 3 \cdot \sqrt{25}} = \sqrt{10 + 3 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$$

$$2) 16^{\frac{3}{4}} - 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[4]{16^3} - \sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[4]{16})^3 \square (\sqrt[3]{27})^2 = (2)^3 - (3)^2 = 8 - 9 = -1$$

Resposta **b**

$$3) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[2]{2^1} \cdot \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 5^{1 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 25} = \sqrt[6]{200}$$

Resposta **e**

$$4) \frac{27}{\sqrt[5]{9}} = \frac{27}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{27 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{27 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{27 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{3} = 9 \cdot \sqrt[5]{27}$$

$$5) (81^{\frac{3}{4}} \square 16^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt[4]{81^3} \square \sqrt[4]{16^1})^{\frac{1}{2}} = [(\sqrt[4]{81})^3 \square \sqrt[4]{16}]^{\frac{1}{2}} = [(3)^3 \square 2]^{\frac{1}{2}} = (27 \square 2)^{\frac{1}{2}} = \\ = (25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = 5$$

Resposta **e**